И. А. КИПРИЯНОВ

# СИНГУЛЯРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ



И А КИПРИЯНОВ

# СИНГУЛЯРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ



МОСКВА
НАУКА • ФИЗМАТЛИТ
1997

ББК 22.162
К 42
УДК 517.95

Киприянов И. А. **Сингулярные эллиптические краевые задачи.**—М.: Наука. Физматлит, 1997.—208 с.— ISBN 5-02-014799-0.

В монографии изложены многомерная теория интегральных преобразований Фурье—Бесселя—Ганкеля и теория многомерных операторов преобразования. Последние главы содержат результаты по общим весовым краевым задачам для сингулярных $B$-эллиптических и $B$-параболических уравнений, при этом входящий в уравнения параметр может принимать комплексные значения. Приведены спектральные характеристики $B$-эллиптических операторов, включая ядра дробных степеней. Рассмотрены краевые задачи для уравнений с особенностью.

Для специалистов по уравнениям математической физики и функциональному анализу, аспирантов, студентов старших курсов математических и прикладных специальностей.

Ил. 1. Библиогр. 201 назв.

Рецензент:

доктор физико-математических наук профессор *В.П. Михайлов*

К $\frac{\mathbf{1602070000\text{-}027}}{\mathbf{053(02)\text{-}97}}$ **71-98. Наука, I полугодие** 

ISBN 5-02-014799-0

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее десятилетие значительно возрос интерес к вырождающимся и сингулярным уравнениям, в том числе и к уравнениям, содержащим дифференциальный оператор Бесселя

$$B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad k = \text{const} > 0.$$

Указанные уравнения часто встречаются в приложениях, например в задачах с осевой симметрией в механике сплошной среды. Интерес к задачам, связанным с оператором Бесселя известен и со стороны фундаментальной физики. Для примера можно сослаться на книгу П. Девиса "Суперсила" (Мир, 1989), где отмечено следующее: "Математический анализ сил, ответственных за формирование материи, также выявляет наличие скрытых симметрий с тонкими свойствами. Опираясь на это, физики установили, что силы можно рассматривать как способ, которым в природе поддерживаются различные симметрии". Эти симметрии необходимо рассматривать в многомерном пространстве-времени размерности больше четырех. С другой стороны, еще А. Вайнштейн (см. работы [15–17]) отметил, что реальное исследование абстрактных геометрий с осесимметрическими переменными (в том числе и с дробным или даже с действительным числом переменных) прямо связано с изучением геометрии обобщенных сдвигов (отвечающих дробному индексу $k$ в соответствующем операторе Бесселя, при этом число $k-1$ играет роль размерности "осесимметрической части" пространства). А именно (по аналогии с пространством с целым числом переменных), сферическое преобразование координат выявит интегральное выражение, содержащее обобщенные сдвиги, "нагруженные" переменные и сингулярные дифференциальные операторы, порожденные оператором Бесселя.

Настоящая работа посвящена решению некоторых задач общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих по одной или нескольким переменным оператор Бесселя. В ней основным аппаратом исследования является соответствующая теория обобщенных функций и многомерное интегральное преобразование Фурье—Бесселя. Обнаруженная связь этих преобразований с новыми классами операторов преобразования позволила изучить специальные весовые классы Соболева, которые являются основными при изучении сингулярных эллиптических краевых задач с оператором

Бесселя, и исследовать спектральные характеристики, особенно асимптотику спектральной функции не только внутри области, но и на границе, где сосредоточена особенность. Благодаря использованию операторов преобразования число $k$ в операторе Бесселя может быть комплексным.

В современной научной литературе нет подробных и полных исследований задач, рассматриваемых в настоящей книге, за исключением некоторых публикаций в периодической печати, доступных лишь специалистам. Надеемся, что выход в свет этой книги восполнит указанный пробел и предложит новые подходы к проблемам прикладного характера, о которых отчасти сказано в начале предисловия.

Ввиду задержки выхода в свет этой книги автор счел нужным дать список дополнительной литературы, в котором отражено дальнейшее развитие этого направления. Особенно следует отметить изученные в последнее время $B$-сингулярные уравнения (т.е. уравнения с оператором Бесселя) с кратными характеристиками (см. [188, 189, 198]), теорию $B$-потенциалов Рисса, построенную на основе специальных интегральных операторов, обращающих эти потенциалы (см. [184, 186, 196, 197]), и ее применение к описанию пространств дробной гладкости, где роль дробных производных выполняют дробные степени оператора Бесселя (см. [191–193]).

Пользуясь случаем, хочу выразить искреннюю благодарность всем тем, чья конструктивная критика и замечания способствовали улучшению текста книги. Благодарю сотрудников кафедры дифференциальных уравнений Воронежского госуниверситета за помощь при оформлении книги. В особенности я благодарен Н.И. Киприяновой, В.З. Мешкову, В.В. Катрахову и Ю.В. Засорину, прочитавшим отдельные главы рукописи и сделавшим ряд критических замечаний.

Июль, 1997 г. *И.А. Киприянов*

# ВВЕДЕНИЕ

Исследованию сингулярных эллиптических уравнений вида

$$\Delta_B u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

где $k = \text{const}$, в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$ посвящены многочисленные работы как в нашей стране, так и за рубежом. Оператор $\Delta_B$ — эллиптический, сунгулярный на прямой $y = 0$. Оператор $y\Delta_B$ — эллиптический, вырождающийся при $y = 0$. Как известно, оператор $\Delta_B$ представляет большой интерес и имеет исключительное значение в связи с проблемой нахождения осесимметрических гармонических функций. В случае целых $k$ уравнению $\Delta_B u = 0$ удовлетворяют гармонические функции $(k+2)$ переменных с осевой симметрией. Теория таких уравнений для общих, не обязательно целых значений $k$, известна как обобщенная осесимметрическая теория потенциала (сокращенно ООСТП). ООСТП развита американским математиком А. Вайнштейном и его школой (см. работы А. Вайнштейна [15], [16], [17], а также книгу Gilbert R. P. Function Theoretic Method in Partial Differential equations.— New York — London: Academic Press, 1969.— 311 p.).

Значительный вклад в эту теорию по различным направлениям внесли русские математики Л. Д. Кудрявцев, И. А. Киприянов, П. И. Лизоркин, Л. Г. Михайлов, М. Н. Олевский, С. А. Терсенов и др.

Обширное исследование по изучению оператора $\Delta_B$ и некоторых его обобщений провели автор и его коллеги (см. [11], [13], [37—40], [50—57], [59—101], [101—109], [110—126], [121—122], [141—144], [160—161], [173—175], [178, 179]).

Изучение оператора $\Delta_B$ требует привлечения некоторых классов специальных функций и соответствующих интегральных преобразований. Эффективным средством при изучении $\Delta_B$ оказалось преобразование Фурье — Бесселя (преобразование Фурье по $x$ и преобразование Бесселя (Ганкеля) по $y$).

В одномерном случае классическое преобразование Ганкеля, включая теорию обобщенных преобразований, рассматривалось в монографии А. Г. Земаняна [41].

В настоящей работе систематически используется многомерное преобразование Фурье — Бесселя (Фурье — по одной группе переменных и Бесселя (Ганкеля) — по другой группе переменных).

Глава I посвящена интегральным преобразованиям Фурье — Бесселя. Сначала вводятся соответствующие пространства пробных (основных) функций и распределений (обобщенных функций), которые играют весьма важную роль в общей теории некоторых классов сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных. Изучается распределение $r^{\lambda}$, являющееся аналитическим продолжением по $\lambda$ соответствующего регулярного весового функционала.

Для удобства приводится классическое прямое и обратное преобразование Ганкеля. Поскольку в отечественной литературе оно в основном именуется как преобразование Бесселя, мы будем придерживаться последнего названия. Приводится соответствующее весовое равенство Парсеваля и формула оператора обобщенного сдвига $T_x^y f(x)$, связанного с дифференциальным оператором Бесселя $B_y=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}$. Оператор $T_x^y$ коммутирует с $B_y$. Обсуждаются сингулярные дифференциальные, интегро-дифференциальные операторы, связанные соответствующими формулами с преобразованием Бесселя (Ганкеля). Приведенные здесь формулы получены автором и послужили основным аппаратом при построении весовых функциональных пространств, при доказательстве прямых и обратных теорем вложения о следах (см. [63], [94]).

Вводится многомерное преобразование Фурье — Бесселя как для функций, так и для распределений. Изучается преобразование Фурье — Бесселя распределения $r^{\lambda}$. Доказывается теорема Пэли — Винера для преобразования Фурье — Бесселя пробных функций. С помощью оператора обобщенного сдвига вводится понятие обобщенной свертки пробных функций и распределений. Приведено доказательство Пэли — Винера — Шварца для преобразования Фурье — Бесселя. В заключение строится гармонический анализ для весовых классов суммируемых функций. Для этого вводится понятие $B$-сферических гармоник.

Глава II посвящена операторам преобразования. В начале главы рассматриваются классические операторы преобразования Сонина $S_{\nu,0}^{-\nu-1/2}$ и Пуассона $\mathscr{P}_{\nu,0}^{\nu+1/2}$. Для построения операторов преобразования нового типа вводится лиувиллевский оператор $I^{\mu}$, $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$, и с его помощью конструируются операторы преобразования $\mathscr{P}_{\nu}$ и $S_{\nu}$ по формулам

$$\mathscr{P}_{\nu}=\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}I^{\nu-1/2},\quad S_{\nu}=I^{1/2-\nu}S_{\nu}^{\nu-1/2}.$$

Дробные интегралы вида $I_e^{\mu}$, содержащие в ядре экспоненту, используются при построении $S_{\nu,e}$, $\mathscr{P}_{\nu,e}$. Изучается связь операторов преобразования с преобразованиями Фурье и Бесселя (Ганкеля) и действие некоторых операторов преобразования в функциональных пространствах. В заключение конструируются многомерные операторы преобразования.

Глава III содержит описание функциональных пространств, которые используются в дальнейшем. В отличие от пространств $H_{\nu}^{s}$, построенных ранее автором здесь, благодаря использованию операторов преобразования, параметр $\nu$ может принимать и комплексные значения. Вводятся весовые следы $\sigma_{\nu}(y)$, зависящие от комплексного параметра $\nu$, и доказываются теоремы о следах.

Результаты этой главы существенно используются в теории сингулярных краевых задач гл. IV и в теории спектральных характеристик гл. V.

В главе IV рассматриваются некоторые задачи для сингулярных уравнений в частных производных, содержащих по одной или нескольким переменным оператор Бесселя. С помощью преобразования Фурье — Бесселя находится фундаментальное решение для оператора $\Delta_B^m$ в пространстве распределений $S'_+$. Вводится понятие плоской весовой волны. Дается разложение $r^\lambda$ на плоские весовые волны. Конструируется фундаментальное решение сингулярного $B$-эллиптического оператора $L(D_x, B_y)$ порядка $2m$ с постоянными коэффициентами. Строится аналог классического разложения Радона гладких финитных функций по функциям типа плоских весовых волн. В § 4.5 указывается другой подход к построению фундаментального решения $B$-эллиптического оператора, использующий аналог классического преобразования Радона. Построено [37] в явном виде фундаментальное решение сингулярного гипоэллиптического оператора нечетного вида $\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}} - \sum_{k=1}^{n} B_k$, где $B_k = \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} + \frac{\nu_k}{y_k}\frac{\partial}{\partial y_k}$ — оператор Бесселя по переменной $y_k$; $\nu_k = \mathrm{const} \geqslant 0$. Сначала рассматривается случай $n=1$. При произвольном $n$, в отличие от $B$-эллиптического случая, существенную роль играет преобразование Фурье — Бесселя, в котором по $x$ применяется преобразование Фурье, а по каждой из переменных $y_1, \ldots, y_n$ — преобразование Бесселя (одномерное преобразование Ганкеля). С помощью свойств симметрии названного преобразования и гармонического анализа на соответствующих пространствах распределений найденная формула фундаментального решения при $n=1$ распространяется на случай произвольного $n$.

Изучаются общие весовые краевые задачи для сингулярных $B$-эллиптических уравнений, содержащих по одной из переменных оператор Бесселя с комплексным параметром. Существенную роль при этом играют операторы преобразования.

Выясняется скорость убывания на бесконечности и структура решений некоторых классов однородных сингулярных уравнений.

В [37], [39], [40] построена в явном виде функция Грина краевой задачи для одного класса сингулярных уравнений, содержащих производную нечетного порядка по переменной $x$ и операторы Бесселя по особым переменным $y_1, \ldots, y_n$.

Приведены теоремы существования и единственности рассматриваемой задачи в неограниченной области.

В последней главе V изучаются спектральные характеристики некоторых сингулярных эллиптических операторов. В начале главы строится параметрикс произвольного порядка для $B$-эллиптического оператора. Исследуется аналитическая глуппа степеней названного оператора. Наиболее интересные результаты связаны с поведением ядер (в смысле теории распределений) степеней оператора. Кроме того, в главе содержатся некоторые утверждения о сингулярных псевдодифференциальных операторах.

Конструируется формула среднего значения для дифференциального оператора второго порядка $\Delta_B$. Найденная формула применяется к разложению некоторых функций, обладающих особенностью определенного вида, в ряд Фурье по собственным функциям оператора $\Delta_B$. Улавливается специфика в образовании коэффициентов Фурье. Учитывая эту специфику, доказывается существование и выясняется поведение так называемых ядер дробного порядка.

Исследуются асимптотические свойства спектральной функции $B$-эллиптического оператора внутри области и на границе области, где сосредоточена особенность.

Пользуясь случаем, благодарю сотрудников кафедры дифференциальных уравнений Воронежского ордена Ленина государственного университета имени Ленинского комсомола за ряд замечаний и бесед, способствовавших улучшению книги. В особенности я благодарен В. З. Мешкову, В. В. Катрахову и Ю. В. Засорину, прочитавшим отдельные главы рукописи и сделавшим ряд критических замечаний.

# ГЛАВА I

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ—БЕССЕЛЯ

Глава начинается с изучения пространств пробных (основных) функций и распределений (обобщенных функций), которые играют важную роль в теории некоторых классов сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных. В качестве пространств пробных функций берутся подпространства четных по последней переменной функций из известных классов $\mathscr{D}(\Omega)$, $S$, $Z$ и т. д., а в качестве распределений—сопряженные к ним пространства. Эти же пространства пробных функций можно вводить непосредственно; так не раз поступали авторы в подобной ситуации раньше.

В § 1.2 изучается распределение $r^\lambda$, которое является аналитическим продолжением по параметру $\lambda$ регулярного весового функционала

$$(r^\lambda;\ \varphi(x, y)) = \int\limits_{R_+^{n+1}} r^\lambda \varphi(x, y) y^k\,dx\,dy,$$

порожденного локально интегрируемой функцией

$$r^\lambda = (|x|^2 + y^2)^{\lambda/2}.$$

Аналитическая функция $r^\lambda$ имеет полюсы, которые зависят от параметра оператора Бесселя (числа $k$). Нормированная функция

$$2r^\lambda / [a_0 \Gamma((n+1+k+\lambda)/2)]$$

уже является целой аналитической функцией $\lambda$, при этом ее значение в точке $\lambda = -(n+1+k)$ равно $\delta$-функции Дирака. Попутно получается формула типа известной формулы Пицетти (см. [21]).

В § 1.3 для удобства приводится прямое и обратное преобразование Ганкеля. Поскольку в отечественной литературе оно именуется чаще как преобразование Бесселя, последнего термина мы в дальнейшем и придерживаемся. Приводится соответствующее весовое равенство Парсеваля и формула оператора обобщенного сдвига $T_x^y f(x)$, соответствующего оператору Бесселя. Обобщенный сдвиг—интегральный ограниченный в соответствующем классе функций оператор, не имеющий обратного. Оператор $T_x^y$ коммутирует с оператором Бесселя. Здесь и в дальнейшем преобразование Бесселя записывается в терминах нормированной функции Бесселя первого

рода $j_\nu$, связанной с функцией Бесселя $J_\nu$ формулой

$$j_\nu(t)=t^{-\nu}2^\nu\Gamma(1+\nu)J_\nu(t).$$

В § 1.4 обсуждаются сингулярные дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы, связанные соответствующими формулами с преобразованием Бесселя. Все приведенные здесь формулы служили основным аппаратом при построении автором весовых функциональных пространств, доказательстве внутренних теорем вложения, прямых и обратных теорем вложения о следах для названных классов функций.

В § 1.5 вводится в рассмотрение многомерное преобразование Фурье — Бесселя — преобразование, в котором по нескольким переменным применяется преобразование Фурье, а по одной — преобразование Бесселя. Отмечаются важнейшие свойства этого преобразования и приводится новое доказательство теоремы Пэли — Винера для преобразования Фурье — Бесселя, пробных функций.

В § 1.6 вводится многомерное преобразование Фурье — Бесселя для распределений. Отмечаются основные свойства.

В § 1.7 изучается преобразование Фурье — Бесселя распределения и некоторые другие, связанные с ним распределения. При нахождении преобразования Фурье — Бесселя $r^\lambda$ задача сводится к вычислению второго определенного интеграла Сонина и интеграла Гегенбауэра.

В § 1.8 с помощью оператора обобщенного сдвига вводится понятие обобщенной свертки пробных функций и распределений. Доказана теорема о коммутативности обобщенной свертки и теоремы, характеризующие структуру ее носителя. Выяснена связь между преобразованием Фурье — Бесселя и обобщенной сверткой. Полученные здесь результаты используются при доказательстве аналога теоремы Пэли — Винера — Шварца.

В § 1.9 приведено доказательство теоремы Пэли — Винера — Шварца для преобразования Фурье — Бесселя.

В § 1.10 строится гармонический анализ в весовых классах суммируемых функций. Для этого вводится понятие $B$-сферических гармоник, определяемых как сужение на единичную сферу $\Sigma_{n-1}\subset\mathbb{R}^n_+=(\mathbb{R}_+)^n$ однородных полиномов, четных по каждой переменной $x_k$ $(k=1, ..., n)$ и удовлетворяющих уравнению

$$\Delta_{(B)}P(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{\nu_k}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)P(x)=0.$$

Устанавливаются следующие факты:

1. Плотность системы $B$-сферических гармоник в пространствах $C(\Sigma_{n-1})$, $L_{2,\nu,+}(\Sigma_{n-1})$, где пространство $L_{2,\nu,+}(\Sigma_{n-1})$ определяется как множество измеримых на сфере $\Sigma_{n-1}$ функций, для которых конечна $\Sigma$-норма, порождаемая скалярным произведением:

$$\langle f, g\rangle_\Sigma=\int\limits_{\Sigma_{n-1}} f(x')\overline{g(x')}\,d\Sigma(x'),$$

где $x'=x/|x|$, $d\Sigma(x')=(x')^\nu dS(x')$.

2. Ортогональность $B$-сферических гармоник различных порядков относительно скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle_\Sigma$.

В этом же параграфе вводятся такие важные классы, как подпространства $\mathscr{F}_k \subset L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_+)$, определяемые соотношением:

$$\mathscr{F}_k = \{ \sum_{j<\infty} f_j(|x|) P_j(x) \in L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_+) \},$$

где $L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_+)$ определяется как множество измеримых функций $f(x)$, для которых $x^\nu |f(x)|^2 \in L_1(\mathbb{R}^n_+)$; $f_j(\cdot)$ — радиальные измеримые функции, $P_j(\cdot)$ — однородные $B$-гармонические полиномы степени $2k$. Затем доказывается лемма 1.10.1 о разложении. Вводится важное для дальнейшего многомерное преобразование Фурье — Бесселя, отличное от предыдущего (см. § 1.6—1.9). Это — преобразование, в котором по каждой переменной действует преобразование Бесселя. Задается оно формулой (1.10.19), которая имеет следующий вид:

$$(F_B f)(u) = \hat{f}(u) = C_{(\nu)} \int_{\mathbb{R}^n_+} f(x) j(x, u) \, d\Lambda(x),$$

где

$$C_{(\nu)} = \left[ 2^{(|\nu|+n)/2} \Gamma\left(\frac{\nu_1+1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{\nu_n+1}{2}\right) \right]^{-1};$$

$$j(x, u) = j_{\mu_1}(x_1 u_1) \dots j_{\mu_n}(x_n u_n), \quad \mu_k = (\nu_k - 1)/2.$$

Ответ на вопрос о действии многомерного преобразования Фурье — Бесселя на подпространства $\mathscr{F}_k \subset L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_+)$, $k = 1, 2, \dots$, дается теоремой 1.10.2. Изучается вопрос о разложимости оператора $\Delta_{(B)}$ на радиальную и угловую части (лемма 1.10.2).

## § 1.1. Пространства пробных функций и распределений

Пусть $\mathbb{R}^{n+1} = \{x = (x', y): x' \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^1\}$. Обозначим через $\Omega_c$ открытое множество в $n+1$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 0)$, симметричное относительно гиперплоскости $\{y=0\}$. Символом $C^m_+(\Omega_c)$ (соответственно $C^m_{+,0}(\Omega_c)$), $m = 0, 1, 2, \dots$, будем обозначать совокупность всех функций класса $C^m(\Omega_c)$ (соответственно $C^m_0(\Omega_c)$), четных по последней переменной $y$.

Через $\mathscr{D}_+(\Omega_c) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k_{+,0}(\Omega_c)$ обозначим множество всех четных по последней переменной $y$ функций пространства $\mathscr{D}(\Omega_c)$ (см. [19], [171]). В пространстве $\mathscr{D}_+(\Omega_c)$ вводится топология, индуцированная в нем топологией пространства $\mathscr{D}(\Omega_c)$. Сопряженное к $\mathscr{D}_+(\Omega_c)$ пространство со своей слабой топологией будем обозначать $\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$.

Пусть $\mathscr{D}'(\Omega_c)_+$ — множество всех четных по переменной $y$ функционалов $\tilde{f}(x) \in \mathscr{D}'(\Omega_c)$. Имеет место

Лемма 1.1.1. *Для любого функционала $f \in \mathscr{D}'_+(\Omega_c)$ существует единственный функционал $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\Omega_c)_+$, сужение которого на $\mathscr{D}_+(\Omega_c)$ совпадает с $f$.*

Доказательство. Пусть $x'=(x_1, ..., x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\varphi^+(x', y)=\frac{1}{2}(\varphi(x', y)+\varphi(x', -y)), \quad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega_c).$$

Очевидно, что функционал $f$, действующий по формуле $(\tilde{f}(x), \varphi(x))=(f(x), \varphi^+(x))$, обладает требуемым свойством. Единственность такого функционала вытекает из того факта, что любой функционал $g\in\mathscr{D}'(\Omega_c)_+$ может быть записан в виде

$$(\tilde{g}(x), \varphi(x))=(\tilde{g}(x), \varphi^+(x)), \qquad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega_c).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.1.1 позволяет отождествить пространства $\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$ и $\mathscr{D}'(\Omega_c)_+$. Введем следующие обозначения: $\alpha=(\alpha', \beta)$, $\alpha'=(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\beta$, $\alpha_j$ — целые неотрицательные числа, $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n+\beta$, $\mathscr{D}_{x_j}=i\frac{\partial}{\partial x_j}$ ($i$ — мнимая единица), $\mathscr{D}_y=i\frac{\partial}{\partial y}$, $\mathscr{D}_{x'}=(\mathscr{D}_{x_1}, ..., \mathscr{D}_{x_n})$, $\mathscr{D}_x=(\mathscr{D}_{x'}, \mathscr{D}_y)$, $\mathscr{D}^\alpha=\mathscr{D}^{\alpha_1}_{x_1} ... \mathscr{D}^{\alpha_n}_{x_n}\mathscr{D}^{\beta}_{y}$.

Пусть $K_c$ — компактное подмножество из $\Omega_c$, $\mathscr{D}_{+,K_c}(\Omega_c)$ — множество всех функций $\varphi\in\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$ таких, что $\operatorname{supp}(\varphi)\subset K_c$. Из леммы 1.1.1 и соответствующей теоремы для пространств $\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$ (см. [19, с. 22]) вытекает

Теорема 1.1.1. *Для того чтобы линейный функционал $f$, заданный на пространстве $\mathscr{D}_+(\Omega_c)$, принадлежал пространству $\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества $K_c\subset\Omega_c$ существовали числа $C=C(f, K_c)$, $N=N(f, K_c)$ такие, что*

$$|(f, \varphi)|\leqslant C\sup_{\substack{x\in K_c\\ |\alpha|\leqslant N}}|\mathscr{D}^\alpha_x\varphi(x)|, \tag{1.1.1}$$

*для всех* $\varphi\in\mathscr{D}_{+,K_c}(\Omega_c)$.

Доказательство. Пусть $L_{p,k,+}(\Omega_c)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $k=\text{const}>0$, — пространство всех измеримых в $\Omega_c$, четных по переменной функций $f(x)$ таких, что $f(x)|y|^{k/p}\in L_p(\Omega_c)$ для $p<\infty$. Через $L^{\text{loc}}_{p,k,+}(\Omega_c)$ будем обозначать множество всех функций $f(x)$, определенных почти везде в $\Omega_c$ и таких, что $\varphi f\in L_{p,k,+}(\Omega_c)$ для любой функции $\varphi\in\mathscr{D}_+(\Omega_c)$.

Используя лемму Дюбуа-Реймонда (см. [19]), будем отождествлять каждую функцию $f(x)\in L^{\text{loc}}_{1,k,+}(\Omega_c)$ с функционалом $f\in\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$, действующим по формуле

$$(f, \varphi)=\int\limits_{\Omega_c}\overline{f(x)}\varphi(x)|y|^k dx, \qquad \varphi\in\mathscr{D}_+(\Omega_c). \tag{1.1.2}$$

Функционал $f\in\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$, действующий по формуле (1.2.1), будем называть *регулярным*, а все остальные функционалы из $\mathscr{D}'_{1+}(\Omega_c)$ — *сингулярными*. Примером сингулярного функционала является $\delta$-функция Дирака

$$(\delta, \varphi)=\varphi(0), \qquad \varphi\in\mathscr{D}_+(\Omega_c).$$

Определим операцию умножения функционала $f \in \mathscr{D}'_+(\Omega_c)$ на функцию $b \in C^{\infty}_{+}(\Omega_c)$ по формуле

$$(bf, \varphi) = (f, \bar{b}\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}_+(\Omega_c).$$

Из теоремы 1.1.2 и формулы Лейбница следует, что $bf \in \mathscr{D}'_+(\Omega_c)$.

Пусть $B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}$ — оператор Бесселя. Для дальнейшего нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.1.2. *Пусть $K_c$ — компактное подмножество открытого множества $\Omega_c \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi(x) \in \mathscr{D}_{+, K_c}(\Omega_c)$ и $A = \sup\limits_{x \in K_c} |y|$. Тогда для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha', \beta)$ и всех целых $p \geqslant 1$ функция $\mathscr{D}^{\alpha'}_{x'} B^p_y \varphi(x)$ принадлежит $\mathscr{D}_{+, K_c}(\Omega_c)$ и имеют место оценки*

$$\sup_{x \in K_c} |\mathscr{D}^{\alpha'}_{x'} B^p_y \varphi(x)| \leqslant C_{\beta, p} \sup_{x \in K_c} |\mathscr{D}^{\alpha'}_{x'} \mathscr{D}^{\beta + 2p}_y \varphi(x)|, \tag{1.1.3}$$

$$\sup_{x \in K_c} |\mathscr{D}^{\alpha'}_{x'} \mathscr{D}^{2p-1}_y \varphi(x)| \leqslant \frac{A}{k+1} C_{2p-1} \sup_{x \in K_c} |\mathscr{D}^{\alpha'}_{x'} B^p_y \varphi(x)|, \tag{1.1.4}$$

$$\sup_{x \in K_c} |\mathscr{D}^{\alpha'}_{x'} \mathscr{D}^{2p}_y \varphi(x)| \leqslant C_{2p} \sup_{x \in K_c} |\mathscr{D}^{\alpha'}_{x'} B^p_y \varphi(x)|, \tag{1.1.5}$$

*где*

$$C_{\beta, p} = \prod_{j=1}^{p} \left(1 + \frac{k}{\beta + 2j - 1}\right), \qquad C_1 = 1,$$

$$C_{2p-1} = \prod_{j=1}^{p} \left(1 + \frac{k}{2j + k}\right), \quad p \geqslant 2, \qquad C_{2p} = \prod_{j=1}^{p} \left(1 + \frac{k}{2j + k - 1}\right), \quad p \geqslant 1.$$

Доказательство. Используя формулу Ньютона — Лейбница и учитывая, что $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x', 0) = 0$ и

$$B_y \varphi(x) = y^{-k} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^k \frac{\partial \varphi(x)}{\partial y}\right), \tag{1.1.6}$$

имеем

$$B_y \varphi(x) = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial y^2} + k \int_0^1 \left.\frac{\partial^2 \varphi(x', t)}{\partial t^2}\right|_{t = y\xi} d\xi, \tag{1.1.7}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) = y \int_0^1 \xi^k (B_t \varphi(x', t))|_{t = y\xi} d\xi, \tag{1.1.8}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x) = B_y \varphi(x) - k \int_0^1 \xi^k (B_t \varphi(x', t))|_{t = y\xi} d\xi. \tag{1.1.9}$$

Из равенств (1.1.7), (1.1.8), (1.1.9) следуют соответственно оценки (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5) при $p=1$. Завершается доказательство индукцией по $p$.

Введем теперь в пространстве $\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$ операцию дифференцирования $\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'} B_y^\beta$ по формуле

$$(\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'} B_y^\beta f, \varphi)=(f, \mathscr{D}_{x'}^{\alpha'} B_y^\beta \varphi).$$

Из теоремы 1.1.1 и леммы 1.1.2 вытекает, что каждый функционал $f\in\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$ бесконечно дифференцируем, т. е. функционал $\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'} B_y^\beta f$ принадлежит $\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$ при всех $\alpha'$, $\beta$. С помощью интегрирования по частям легко видеть также, что если функция $f(x)\in C_+^m(\Omega_c)$, то ее классические производные $\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'} B_y^\beta f$, $|\alpha'|+2\beta\leqslant m$, и те же производные в смысле распределения совпадают в $\Omega_c$.

Определим, наконец, функционал $\bar{f}$, комплексно сопряженный к функционалу $f\in\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$, по формуле

$$(\bar{f}, \varphi)=\overline{(f, \bar{\varphi})}.$$

Очевидно, что $\bar{f}\in\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$. Через $\Phi_+(\Omega_c)$ обозначим пространство всех функций класса $C_+^\infty(\Omega_c)$, топология в котором вводится так же, как и в пространстве $\mathscr{E}(\Omega_c)$, а через $\Phi'_+(\Omega_c)$ — множество всех линейных непрерывных функционалов на $\Phi_+(\Omega_c)$. Из леммы 1.1.1 и соответствующих результатов для пространства (см., например, [47, гл. 1, § 13]) следует, что пространство $\Phi'_+(\Omega_c)$ можно отождествить с множеством всех финитных функционалов из $\mathscr{D}'_+(\Omega_c)$ и что имеет место следующая теорема

Теорема 1.1.2. *Для того чтобы линейный функционал $f$, заданный на пространстве $\Phi_+(\Omega_c)$, принадлежал пространству $\Phi'_+(\Omega_c)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое компактное множество $K_c\subset\Omega_c$ и такие постоянные $C>0$, $N\geqslant 0$, что*

$$|(f, \varphi)|\leqslant C \sup_{\substack{x\in K_c\\ |\alpha|\leqslant N}} |D_x^\alpha \varphi(x)| \quad \forall\varphi\in\Phi_+(\Omega_c). \tag{1.1.10}$$

*При этом $K_c$ является множеством, содержащим носитель функционала $\tilde{f}$, являющегося сужением $f$ на $\mathscr{D}_+$.*

Через $Z_+$ обозначим множество всех четных по переменной $y$ функций пространства $Z$ (см. [21]—[22], [174]). В пространстве $Z_+$ вводится топология, индуцированная в нем топологией пространства $Z$.

Через $Z'_+$ обозначим сопряженное к $Z_+$ пространство, наделенное слабой топологией, индуцированной пространством $Z'$. Каждая $g(\sigma', \tau)\in L_{1,k,+}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, возрастающая на бесконечности не быстрее некоторой степени $|\sigma|$, $(\sigma=(\sigma', \tau)$, $\sigma'=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$, порождает функционал $g\in Z'_+$, действующий по формуле

$$(g, \psi)=\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \overline{g(\sigma)}\, \psi(\sigma)\, |\tau|^k\, d\sigma, \qquad \psi\in Z_+. \tag{1.1.11}$$

Функционал $g\in Z'_+$, действующий по формуле (1.1.11), будем называть регулярным, а все остальные функционалы из $Z'_+$ — сингулярными.

Так же как и в пространстве $\mathscr{D}'_+$, в пространстве $Z'_+$ можно ввести операцию дифференцирования $\mathscr{D}^{\alpha'}_{s'} B^{\beta}_{t}$, $s=(s', t)$, $s'=(s_1, ..., s_n)$. Мультипликатором в $Z'_+$ служит любая четная по переменной $t$ функция $h(s)$, являющаяся мультипликатором в пространстве $Z$ (см. [22]); операция умножения на функцию определяется обычным образом.

Через $S_+$ обозначим линейное топологическое пространство всех функций $\varphi(x) \in C^{\infty}_{+}(\mathbb{R}^{n+1})$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Топология в пространстве $S_+$ вводится так же, как и в пространстве $S$ (см. [22]). Через $S'_+$ будем обозначать сопряженное к $S_+$ пространство, наделенное слабой топологией, индуцированной пространством $S'$. Основные факты, касающиеся пространств $S_+$ и $S'_+$, содержатся в [36], [64]. Отметим, что каждая функция $\psi(s) \in Z_+$, рассматриваемая при вещественных значениях аргумента $s$, принадлежит пространству $S_+$.

Имеют место следующие соотношения:

$$\mathscr{D}_+ \overset{\text{def}}{=} \mathscr{D}_+(\mathbb{R}^{n+1}) \subset S_+ \subset S'_+ \subset \mathscr{D}'_+; \quad Z_+ \subset S_+; \quad S'_+ \subset Z'_+.$$

## § 1.2. Распределение $r^{\lambda}$

Пусть $\varphi(x', y) \in S_+(\mathbb{R}^{n+1})$. Рассмотрим функционал

$$(r^{\lambda}, \varphi(x', y)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{\infty} r^{\lambda} \varphi(x', y)\, y^k\, dy\, dx', \tag{1.2.1}$$

где $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + y^2$. Так как $r^{\lambda} y^k$ — однородная функция степени $\lambda + k$, то интеграл (1.2.1) имеет смысл при $\operatorname{Re}\lambda > -(n+k+1)$. Для $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -(n+k+1)$ функционал (1.2.1) определим методом аналитического продолжения по параметру $\lambda$. Перейдем в (1.2.1) к сферическим координатам по формулам

$$\begin{aligned} y &= r\cos\alpha_1, \\ x_1 &= r\cos\alpha_2 \sin\alpha_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= r\sin\alpha_n \ldots \sin\alpha_1. \end{aligned}$$

Тогда $dx\, dy = r^n dr\, d\Omega$; $\cos\alpha_1 \geqslant 0$, так как $y \geqslant 0$. Положим

$$\int\limits_{\Omega} \cos^k \alpha_1\, \varphi(x, y)\, d\Omega = a_0 S_{\varphi}(r), \tag{1.2.2}$$

где

$$a_0 = \int\limits_{\Omega} \cos^k \alpha_1\, d\Omega = \frac{2\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right)}.$$

Здесь $\Omega$ — полусфера в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $S(r)$ — весовое среднее $\varphi(x, y)$ по полусфере радиуса $r$. Функционал (1.2.1) запишется

следующим образом:

$$(r^\lambda, \varphi)=a_0 \int\limits_0^\infty r^{\lambda+n+k} S_\varphi(r)\,dr. \qquad (1.2.3)$$

Функция $S_\varphi(r)$ бесконечно дифференцируема при $r>0$ и убывает при $r\to\infty$ быстрее любой степени $1/r$. Последнее следует из аналогичных свойств $\varphi(x, y)$. Используя формулу Тейлора (см. [21]), получаем

$$S_\varphi(r)=\varphi(0, 0)+b_1 r^2+b_2 r^{(4)}+\ldots+O(r^{2m}). \qquad (1.2.4)$$

Из этого разложения следует, что $S_\varphi(r)$ имеет все производные при $r=0$, и все нечетные производные при $r=0$ обращаются в нуль. Следовательно, $S_\varphi(r)$ можно рассматривать как четную функцию переменного $r$ из пространства $S_+$. В таком случае удобно ввести в рассмотрение обычную невесомую линейную форму:

$$(a_0 x_+^\mu, S_\varphi(x))_{\mathbb{R}^1}=a_0 \int\limits_0^\infty x^\mu S_\varphi(x)\,dx \qquad (\mu=\lambda+n+k).$$

Следовательно, равенство (1.2.3) можно понимать как результат применения функционала $a_0 x_+^\mu$ $(\mu=\lambda+n+k)$ к пробной функции $S_\varphi(x)\in S(\mathbb{R}^1)$. Этот функционал продолжается на все $\mu$, исключая $\mu=-1, -2, \ldots$, где имеются полюсы, при этом вычет в полюсе $\mu=-m$ равен

$$a_0 \frac{((-1)^{m-1}\delta^{(m-1)}(x);\, S_\varphi(x))_{R^1}}{(m-1)!}=a_0 \frac{S_\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}. \qquad (1.2.5)$$

Здесь $\delta(x)$ означает обычную невесовую $\delta$-меру одного скалярного аргумента $x\in\mathbb{R}^1$. Ее не следует путать с распределением $\delta_B(x)$ из § 1.1, ассоциированным уже с весовой линейной формой $(f(x), \varphi(x))_{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, $x\in\mathbb{R}_+^1$). Так как нечетные производные $S_\varphi(r)$ обращаются в нуль при $r=0$, то останутся полюса в точках: $\mu=-1, -3, \ldots, -2p-1, \ldots$; $\lambda=-\gamma, -\gamma-2, \ldots, -\gamma-2p, \ldots$, где $\gamma=n+k+1$. Отсюда вытекает, что вычет $(r^\lambda, \varphi)$ при $\lambda=-\gamma-2p$ равен

$$a_0 \frac{(\delta^{(2p)}(x),\, S_\varphi(x))_{R^1}}{(2p)!}=a_0 \frac{S_\varphi^{(2p)}(0)}{(2p)!}. \qquad (1.2.6)$$

Величину $S_\varphi^{(2p)}(0)$ можно выразить непосредственно через $\varphi(x, y)$, минуя ее усреднение. Положим

$$\Delta_B=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+B_y. \qquad (1.2.7)$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\Delta_B(r^{\lambda+2})=(\lambda+2)(\lambda+\gamma)\,r^\lambda \qquad (1.2.8)$$

для $\operatorname{Re}\lambda>-\gamma$. Для остальных $\lambda$ эта формула остается справедливой в силу аналитического продолжения. Используя эту формулу, получаем

$$r^\lambda=\frac{\Delta_B^p(r^{\lambda+2p})}{(\lambda+2)\ldots(\lambda+2p)(\lambda+\gamma)\ldots(\lambda+\gamma+2p-2)}. \qquad (1.2.9)$$

Вычет $r^\lambda$ при $\lambda=-\gamma-2p$ можно теперь подсчитать как вычет правой части (1.2.9) при этом значении $\lambda$. Но для любой пробной функции $\varphi(x, y)$ имеем

$$(\Delta_B^p r^{\lambda+2p};\ \varphi)=(r^{\lambda+2p};\ \Delta_B^p \varphi),$$

а вычет правой части при $\lambda=-\gamma-2p$ равен $a_0 \Delta_B^p \varphi(0, 0)$. Отсюда следует, что вычет $(r^\lambda, \varphi)$ при $\lambda=-\gamma-2p$ равен

$$\frac{a_0 \Delta_B^p \varphi(0, 0)}{(-2p-(\gamma+2))\dots(-\gamma)(-2p)\dots(-2)}=\frac{a_0(\Delta_B^p \delta_B(x', y);\ \varphi(x', y))}{2^p p!\,\gamma(\gamma+2)\dots(\gamma+2p-2)}. \qquad (1.2.10)$$

Итак, вычет распределения $r^\lambda$ при $\lambda=-\gamma-2p$ равен $[a_0 \Delta_B^p \delta_B(x, y)] \times \times [2^p \cdot p!\,\gamma(\gamma+2)\dots(\gamma+2p-2)]^{-1}$. Сравнивая это выражение с (1.2.6), получаем

$$S_\varphi^{(2p)}(0)=\frac{(2p)!\,\Delta_B^p \varphi(0, 0)}{2^p \cdot p!\,\gamma(\gamma+2)\dots(\gamma+2p-2)}. \qquad (1.2.11)$$

Теперь можно написать следующее разложение Тейлора для $S_\varphi(r)$:

$$S_\varphi(r)=\sum_{k=0}^{m} \frac{\Delta_B^k \varphi(0, 0)\, r^{2k}}{2^k k!\,\gamma(\gamma+2)\dots(\gamma+2k-2)}+O(r^{2m}). \qquad (1.2.12)$$

Последняя формула представляет собой формулу типа формулы Пицетти (см. [21]).

Напишем разложение в ряды Тейлора и Лорана для $r^\lambda$. Используя разложение $x_+^\mu$ в окрестности регулярной точки $\mu$ в ряд Тейлора (см. [21]), получаем

$$(r^\lambda, \varphi)=a_0(x_+^\mu, S_\varphi(x))=a_0(x_+^\mu, S_\varphi(x))_{\mathbb{R}^1}+ \\ +a_0(\mu-\mu_0)(x_+^\mu \ln x_+;\ S_\varphi(x))_{\mathbb{R}^1}+\dots \qquad (1.2.13)$$

Так как $\lambda+k+n=\mu$, $\lambda_0 \pm k+n=\mu_0$, то вводя обозначения $a_0(x_+^\mu \ln x_+;\ S_\varphi(x))=(r^\lambda \ln r, \varphi)$ и т. д., получаем

$$r^\lambda=r^{\lambda_0}+(\lambda-\lambda_0)\, r^{\lambda_0} \ln r+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\, r^{\lambda_0} \ln^2 r+\dots \qquad (1.2.14)$$

Теперь найдем разложение $r^\lambda$ в ряд Лорана в окрестности $\lambda=-\gamma-2p$. Так как $\mu=-2p-1$, то разложение в окрестности этой точки имеет вид

$$x_+^\mu=\frac{\delta^{(2p)}(x)}{(2p)!\,(\mu+2p-1)}+x_+^{2p-1}+(\mu+2p+1)\, x^{-2p-1} \ln x+\dots$$

Итак,

$$(r^\lambda, \varphi)=a_0(x_+^\mu, S_\varphi(x))_{\mathbb{R}^1}=\frac{a_0(\delta^{(2p)}(x);\ S_\varphi(x))_{\mathbb{R}^1}}{(2p)!\,(\lambda+\gamma+2p)}+ \\ +a_0(x_+^{-2p-1};\ S_\varphi(x))_{\mathbb{R}^1}+(\lambda+\gamma+2p)\, a_0(x_+^{-2p-1} \ln x_+;\ S_\varphi(x))_{\mathbb{R}^1}+\dots \qquad (1.2.15)$$

Так как

$$\frac{a_0(\delta^{(2p)}(x);\ S_\varphi(x))_{\mathbb{R}^1}}{(2p)!}=b_p \Delta_B^p \varphi(0, 0)=b_p(\Delta_B^p \delta_B;\ \varphi), \qquad (1.2.16)$$

где $b_p = \frac{a_0}{2^p p!\,\gamma(\gamma+2)\dots(\gamma+2p-2)}$, то, полагая

$$a_0(x_+^{2p-1}, S_\varphi(x)) = (r^{-2p-\gamma};\ \varphi);$$
$$a_0(x_+^{2p-1}\ln x_+, S_\varphi(x)) = (r^{-2p-\gamma}\ln r,\ \varphi)$$

и т. д., получим следующее разложение $r^\lambda$ в окрестности $\lambda = -2p-\gamma$:

$$r^\lambda = \frac{b_p \Lambda_B^p \delta_B(x, y)}{\lambda+\gamma+2p} + r^{-2p-\gamma} + (\lambda+\gamma+2p)\, r^{-2p-\gamma}\ln r + \dots \qquad (1.2.17)$$

Для удобства нормируем $r^\lambda$. Имеем

$$(r^\lambda, e^{-r^2}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty r^\lambda e^{-r^2} y^k\, dy\, dx = \frac{a_0}{2}\Gamma\left(\frac{\lambda+\gamma}{2}\right).$$

Распределение $2r^\lambda\left[a_0\Gamma\left(\frac{\lambda+\gamma}{2}\right)\right]^{-1}$ является целой аналитической функцией $\lambda$. Значение его (см. [64]) в особых точках числителя и знаменателя можно найти как отношение соответствующих вычетов. Таким образом, имеем

$$\left.\frac{2r^\lambda}{a_0\Gamma\left(\frac{\lambda+\gamma}{2}\right)}\right|_{\lambda=-\gamma-2p} = (-1)^p \frac{\Delta_B^p \delta_B(x, y)}{2^p \gamma(\gamma+2)\dots(\gamma+2p-2)}. \qquad (1.2.18)$$

В частности, при $p=0$ имеем

$$\left.\frac{2r^\lambda}{a_0\Gamma\left(\frac{\lambda+\gamma}{2}\right)}\right|_{\lambda=-\gamma} = \delta_B(x, y). \qquad (1.2.19)$$

## § 1.3. Преобразование Ганкеля (одномерное преобразование Бесселя в $S_+$)

Пусть $n=0$, а $\varphi \in S_+(\mathbb{R}^1)$. Прямое и обратное преобразования Ганкеля (Бесселя) определяются (см. [36]) следующим образом:

$$\hat{\varphi}_\nu(s) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(sx) x^{2\nu+1}\, dx, \qquad (1.3.1)$$

$$\varphi(x) = [2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)]^{-1}\int\limits_0^\infty \hat{\varphi}_\nu(s) j_\nu(sx) s^{2\nu+1}\, ds, \qquad (1.3.2)$$

где $j_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ есть решение задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \qquad (1.3.3)$$

при условии $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Функция $j_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ с обычной функцией Бесселя связана формулой

$$j_\nu(\sqrt{\lambda}x)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{(\sqrt{\lambda}x)^\nu}J_\nu(\sqrt{\lambda}x). \qquad (1.3.4)$$

Так как

$$P(B)[j_\nu(sx)]=P(-s^2)j_\nu(sx),$$

где $P(B)$ — любой полином от оператора Бесселя $B=\frac{d}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}$, то

$$[P(B)\varphi(s)]\hat{}=P(-s^2)\hat{\varphi}(s). \qquad (1.3.5)$$

Преобразование Ганкеля является непрерывным автоморфизмом пространства $S_+$ (см. [36]). Мультипликатором для $S_+$ является любая четная бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, которая вместе со всеми своими производными возрастает при $x\to\infty$ не быстрее некоторой степени $x$.

Сверткой $(f*g)(x)$ пробных функций $f$ и $g$ называется выражение [36]

$$(f*g)(x)=\int_0^\infty T_x^y f(x)g(y)y^{2\nu+1}dy, \qquad (1.3.6)$$

где $T_x^y$ — оператор обобщенного сдвига, соответствующий оператору Беселя $B_x=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}$.

Свойства оператора $T_x^y$ известны (см. [131]); приведем некоторые из них.

1) $T_x^y j_\nu(\sqrt{\lambda}x)=j_\nu(\sqrt{\lambda}y)j_\nu(\sqrt{\lambda}x)$.

2) Самосопряженность оператора: если $f(x)$ — непрерывная функция $\int_0^\infty x^{2\nu+1}|f(x)|dx<\infty$ и $g(x)$ непрерывна и ограничена для всех $x\geqslant 0$, то

$$\int_0^\infty T_x^y f(x)g(x)x^{2\nu+1}dx=\int_0^\infty f(x)T_x^y g(x)x^{2\nu+1}dx.$$

3) $T_x^y f(x)=T_x^y f(y)$.

Оператор $T_x^y$ является линейным, однородным и непрерывным. Результат применения $T_x^y$ к функции $f(x)$ вычисляется по следующей формуле (см. [131]):

$$T_x^y f(x)=\Gamma(\nu+1)[\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)]^{-1}\times$$
$$\times\int_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi})\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi. \qquad (1.3.7)$$

Заметим, что

$$[T_x^y\varphi(x)]\hat{}=j_\nu(sy)\hat{\varphi}(s). \qquad (1.3.8)$$

Отсюда ясно, что $T_x^y\varphi(x)\in S_+$ вместе с $\varphi(x)\in S_+$. Имеет место формула (см. [36])

$$\widehat{g*f}=\hat{g}\cdot\hat{f}. \tag{1.3.9}$$

Справедлива следующая теорема (см. [63]):

Теорема 1.3.1. *Если* $\varphi(x)x^{\nu+1/2}\in L_2[0,\ \infty)$, *то преобразование Ганкеля* $\hat{\varphi}_\nu$ *также принадлежит* $L_2[0,\ \infty)$ *с весом* $s^{\nu+1/2}$, *т. е.* $\hat{\varphi}_\nu(s)s^{\nu+1/2}\in L_2[0,\ \infty)$. *Справедливо равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty|\hat{\varphi}_\nu(s)|^2s^{2\nu+1}ds=2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)\int_0^\infty|\varphi(x)|^2x^{2\nu+1}dx. \tag{1.3.10}$$

Доказательство. В самом деле, если $\nu\geqslant-1/2$, то с помощью функции Бесселя $J_\nu(t)$ образуем функцию $t^{1/2}J_\nu(t)$. Тогда (см. [18]) для любой $\varphi(x)\in L_2[0,\ \infty)$ имеют место взаимообратные формулы

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_\nu(s)&=\int_0^\infty\sqrt{sx}\,J_\nu(sx)\varphi(x)dx,\\ \varphi(x)&=\int_0^\infty\sqrt{sx}\,J_\nu(sx)\hat{\varphi}_\nu(s)ds,\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

понимаемые в соответствующем смысле и представляющие собой не что иное, как преобразование Ганкеля, записанное в терминах функции $J_\nu$. Имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty|\hat{\varphi}_\nu(s)|^2ds=\int_0^\infty|\varphi(x)|^2dx. \tag{1.3.11$'$}$$

Если $x^{\nu+1/2}\varphi(x)\in L_2[0,\ \infty)$, то первая из формул (1.3.11) запишется в виде

$$\int_0^\infty\sqrt{xs}\,J_\nu(sx)x^{\nu+1/2}\varphi(x)dx=\{s^{\nu+1/2}/[2^\nu\Gamma(\nu+1)]\}\int_0^\infty j_\nu(sx)\times$$
$$\times\varphi(x)x^{2\nu+1}dx=s^{\nu+1/2}[2^\nu\Gamma(\nu+1)]^{-1}\hat{\varphi}_0(s). \tag{1.3.12}$$

Вторая из формул (1.3.11) принимает соответственно следующий вид:

$$x^{\nu+1/2}\varphi(x)=\int_0^\infty\sqrt{sx}\,J_\nu(sx)s^{\nu+1/2}\hat{\varphi}_\nu(s)ds=$$
$$=x^{\nu+1/2}[2^\nu\Gamma(\nu+1)]^{-1}\int_0^\infty j_\nu(sx)\hat{\varphi}_\nu(s)s^{2\nu+1}ds. \tag{1.3.13}$$

Из формул (1.3.11) и (1.3.12) с помощью равенства (1.3.11′) получаем равенство Парсеваля, записанное в форме (1.3.10). Сами же формулы (1.3.11) переходят, согласно (1.3.12) и (1.3.13), соответственно в прямое и обратное преобразования Ганкеля, которые приведены в начале параграфа. Часто (см., например, [131], [36]) преобразование (1.3.1)—(1.3.2) именуют еще преобразованием Бесселя.

## § 1.4. Дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы, соответствующие преобразованию Ганкеля (Бесселя)

Пусть $R$ обозначает положительное число или бесконечность. Через $C^\infty(0, R)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых на интервале $(0, R)$ функций. Через $C^\infty[0, R)$ обозначим подмножество функций из $C^\infty(0, R)$, все производные которых непрерывны вплоть до левого конца. Символ $\overset{0}{C}{}^\infty[0, R)$ обозначает подмножество функций из $C^\infty[0, R)$, обращающихся в нуль в окрестности правого конца. Функцию $f\in C^\infty[0, R)$ будем называть *четной*, если $\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}f(0)=0$ при всех неотрицательных $k$. Функция $f\in C^\infty[0, R)$ будет четной тогда и только тогда, когда $g(y)=f(\sqrt{y})$ принадлежит $C^\infty[0, R)$. Для проверки этого утверждения достаточно воспользоваться формулой Тейлора. Множество четных функций обозначим через $C_+^\infty[0, R)$. Положим $\overset{0}{C}{}_+^\infty[0, R)=C_+^\infty[0, R)\cap\overset{0}{C}{}^\infty[0, R)$.

Пусть $f(x)\in\overset{0}{C}{}_+^\infty[0, R)$. Имеет место следующая формула (см. [35, с. 433, формула (11.7)]):

$$\int_0^\infty t^{1/2-\nu-1}\frac{d}{dt}\left[t^{\nu-1-1/2}f(t)\right]\ J_\nu(ut)\sqrt{ut}\,dt=u\int_0^\infty f(t)J_{\nu+1}(ut)\sqrt{ut}\,dt. \quad (1.4.1)$$

Сокращая обе части (1.4.1) на $\sqrt{u}$ и затем заменяя на $t^{\nu+1/2}$, будем иметь

$$\int_0^\infty t^{-\nu-1/2}\frac{d}{dt}\left[t^{2\nu+1}f(t)\right]J_\nu(ut)\sqrt{t}\,dt=u\int_0^\infty f(t)J_{\nu+1}(ut)t^{\nu+2}dt. \quad (1.4.2)$$

Перейдем от $J_\nu(ut)$ к $j_\nu(ut)$ по формуле (см. (1.3.4))

$$J_\nu(ut)=\{(ut)^\nu/\left[2^\nu\Gamma(\nu+1)\right]\}j_\nu(ut).$$

Тогда (1.4.2) запишется в виде

$$\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty t^{-2\nu-1}\frac{d}{dt}\left[t^{2\nu+2}f(t)\right]\frac{u^\nu t^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}j_\nu(ut)t^{1/2}dt=$$

$$=u\int_0^\infty f(t)\{(u^{\nu+1}t^{\nu+1})/\left[2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)\right]\}j_{\nu+1}(ut)t^{\nu+2}dt, \quad (1.4.3)$$

откуда, после сокращения обеих частей на $u^\nu$, имеем

$$\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty t^{-2\nu-1}\frac{d}{dt}\left[t^{2\nu+2}f(t)\right]j_\nu(ut)t^{2\nu+1}dt=$$

$$=\frac{u^2}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)}\int\limits_0^\infty f(t)j_{\nu+1}(ut)t^{2(\nu+1)+1}dt. \quad (1.4.4)$$

Кроме того, имеет место формула (см. [35, с. 433, формула (11.9)]) с заменой в ней $\nu$ на $\nu+1$ при $\nu+1-\mu>-1/2$:

$$\int\limits_0^\infty [t^{1/2-\nu-1}\int\limits_0^t \xi^{\nu+1-\mu+1/2}(t^2-\xi^2)^{\mu-1}f(\xi)d\xi]\, J_{\nu+1}(ut)\sqrt{ut}\,dt=$$

$$=2^{\mu-1}\Gamma(\mu)u^{-\mu}\int\limits_0^\infty f(t)\, J_{\nu+1-\mu}(ut)\sqrt{ut}\,dt. \quad (1.4.5)$$

Сокращая обе части (1.4.5) на $\sqrt{u}$ и заменяя $J_{\nu+1}(ut)$ и $J_{\nu+1-\mu}(ut)$ соответственно на $j_{\nu+1}(ut)$ и $j_{\nu+1-\mu}(ut)$, получаем следующее соотношение:

$$\int\limits_0^\infty [t^{-\nu}\int\limits_0^t \xi^{\nu+1-\mu+1/2}(t^2-\xi^2)^{\mu-1}f(\xi)d\xi][(u^{\nu+1}t^{\nu+1})/(2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2))^{-1}]\times$$

$$\times j_{\nu+1}(ut)dt=2^{\mu-1}\Gamma(\mu)u^{-\mu}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty f(t)\,\{(u^{\nu+1-\mu}t^{\nu+1-\mu})/[2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2-\mu)]^{-1}\}j_{\nu+1-\mu}(ut)t^{1/2}dt. \quad (1.4.6)$$

После сокращения обеих частей (1.4.5) на $u^{\nu+1}$ и последующей замены $f(t)$ на $t^{\nu+1-\mu+1/2}f(t)$ найдем, что

$$[2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)]^{-1}\int\limits_0^\infty [t^{2\nu+2}\int\limits_0^t \xi^{2(\nu+1-\mu)+1}(t^2-\xi^2)^{\mu-1}f(\xi)d\xi]\times$$

$$\times j_{\nu+1}(ut)t^{2(\nu+1)+1}dt=\{[2^{\mu-1}\Gamma(\mu)u^{-2\mu}]/[2^{\nu+1-\mu}\Gamma(2+\nu-\mu)]\}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty f(t)j_{\nu+1-\mu}(ut)t^{2(\nu+1-\mu)+1}dt. \quad (1.4.7)$$

Заменим в (1.4.4) функцию $f(t)$ на

$$t^{-2\nu-2}\int\limits_0^t \xi^{2(\nu+1-\mu)+1}(t^2-\xi^2)^{\mu+1}f(\xi)d\xi.$$

Тогда будем иметь

$$[2^\nu\Gamma(\nu+1)]^{-1}\int\limits_0^\infty t^{-2\nu-1}\frac{d}{dt}\left[\int\limits_0^t \xi^{2(\nu+1-\mu)+1}(t^2-\xi^2)^{\mu-1}f(\xi)d\xi\right]\times$$

$$\times j_\nu(ut)t^{2\nu+1}dt=\{u^2/[2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)]\}\int\limits_0^\infty t^{-2\nu-2}[\int\limits_0^t \xi^{2(\nu+1-\mu)-1}\times$$

$$\times(t^2-\xi^2)^{\mu-1}f(\xi)]j_{\nu+1}(ut)t^{2(\nu+1)+1}dt. \quad (1.4.8)$$

Из (1.4.8) с помощью формулы (1.4.7) находим, что

$$\frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\int\limits_0^{\infty} t^{-2\nu+1}\left[\frac{d}{dt}\int\limits_0^{t}\xi^{2(\nu+1-\mu)+1}\left(t^2-\xi^2\right)^{\mu-1}f(\xi)\,d\xi\right]\times$$

$$\times j_{\nu}(ut)\,t^{2\nu+1}dt=\{[2^{\mu-1}\Gamma(\mu)\,u^{2-2\mu}]/[2^{\nu+1-\mu}\Gamma(\nu+2-\mu)]\}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\infty} f(t)\,j_{\nu+1-\mu}(ut)\,t^{2(\nu+1-\mu)+1}dt=$$

$$=2^{2(\mu-\nu-1)}\Gamma(\mu)\left(\Gamma(\nu+2-\mu)\right)^{-1}u^{2-2\mu}\hat{f}_{\nu+1-\mu}, \qquad (1.4.9)$$

откуда с помощью обратного преобразования Ганкеля имеем

$$t^{-2\nu-1}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{t}\tau^{2(\nu+1-\mu)+1}\left(t^2-\tau^2\right)^{\mu-1}f(\tau)\,d\tau\right]=$$

$$=C_{\nu,\mu}\int\limits_0^{\infty}u^{2(1-\mu)}\hat{f}_{\nu+1-\mu}(u)\,j_{\nu}(ut)\,u^{2\nu+1}du, \qquad (1.4.10)$$

где $C_{\nu,\mu}$ — некоторая постоянная.

Применив равенство Парсеваля для преобразования Ганкеля, получаем

$$\int\limits_0^{\infty}\left\{t^{-2\nu-1}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{t}\tau^{2(\nu+1-\mu)}\left(t^2-\tau^2\right)^{\mu-1}f(\tau)\,d\tau\right]^2\right\}t^{2\nu+1}dt=$$

$$=\tilde{C}_{\nu,\mu}\int\limits_0^{\infty}u^{4(1-\mu)}\,|\tilde{f}_{\nu+1-\mu}(u)|^2u^{2\nu+1}du, \qquad (1.4.10')$$

где $\tilde{C}_{\nu,\mu}$ — постоянная, зависящая только от $\nu$ и $\mu$. Пусть $n$ — натуральное число, $0<\alpha<1$, $\beta\geqslant 0$. Положим $\nu+1-\mu=n/2-1+\beta$ и $1-\mu=\alpha$. Тогда $\nu=n/2-1+\beta-\alpha$ и $2\nu+1=n-1+2\beta-2\alpha$. В соответствии с этим формула (1.4.10) принимает следующий вид:

$$t^{-n+1-2\beta+2\alpha}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{t}\left(t^2-\tau\right)^{-\alpha}f(\tau)\,\tau^{n-1+2\beta}d\tau\right]=$$

$$=C_n^{(\alpha,\beta)}\int\limits_0^{\infty}u^{2\alpha}\hat{f}_{n/2-1+\beta}(u)\,j_{n/2-1+\beta-\alpha}(tu)\,u^{n-1+2\beta-2\alpha}du. \qquad (1.4.11)$$

Так как для $f$ справедливо представление с помощью преобразования Ганкеля

$$f(t)=2^{-n+2-2\beta}\Gamma^{-2}(n/2+\beta)\int_0^\infty \hat{f}_{n/2-1+\beta}(u) j_{n/2-1+\beta}(ut)\, u^{n-1-2\beta}du,$$

то соотношение (1.4.11) можно рассматривать как результат применения к обеим частям равенства (1.4.12) интегро-дифференциального оператора

$$t^{-n+1-2\beta+2\alpha}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t^2-\tau^2)^{-\alpha} f(\tau)\,\tau^{n-1+2\beta}d\tau\right], \tag{1.4.12}$$

стоящего в левой части (1.4.11) с соответствующим соотношением констант. Равенство Парсеваля (1.4.10) запишется в виде

$$\int_0^\infty \left\{t^{-n+1-2\beta+2\alpha}\frac{d}{dt}\left[\Gamma^{-1}(1-\alpha)\int_0^t (t^2-\tau^2)^{-\alpha} f(\tau)\,\tau^{n-1+2\beta}d\tau\right]^2\right\}\times$$

$$\times\, t^{n-1+2\beta}dt=\tilde{C}_n^{(\alpha,\beta)}\int_0^\infty u^{2\alpha}\,|\hat{f}_{n/2-1+\beta}(u)|^2 u^{n-1+2\beta}du. \tag{1.4.13}$$

Перейдем теперь к рассмотрению дифференциального оператора $\frac{d}{t\,dt}$, связанного с преобразованием Ганкеля. Имеет место равенство (см. [35, с. 433, формула (11.8)])

$$\int_0^\infty t^{k+1/2}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m \left[t^{m-k-1/2}f(t)\right] J_k(ut)\sqrt{ut}\,dt=$$

$$=(-1)^m u^m\int_0^\infty f(t)\,J_{k-m}(ut)\sqrt{ut}\,dt. \tag{1.4.14}$$

Сокращая обе части (после перехода к $j_k(\cdot)$ и $j_{k-m}(\cdot)$) на $u^{k+1/2}$ и заменяя $f(t)$ на $t^{k-m+1/2}f(t)$, придем к формуле вида

$$\frac{1}{2^k\Gamma(k+1)}\int_0^\infty \left[\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m f(t)\right] j_k(ut)\, t^{2k+1}dt=$$

$$=\{(-1)^m/[2^{k-m}\Gamma(1+k+m)]\}\int_0^\infty f(t) j_{k-m}(ut)\, t^{2(k-m)+1}dt=$$

$$=\{(-1)^m/[2^{k-m}\Gamma(1+k-m)]\}\,\hat{f}_{k-m}(u). \tag{1.4.15}$$

Отсюда по формуле обратного преобразования Ганкеля имеем

$$\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m f(t)=C_{k,m}\int_0^\infty \hat{f}_{k-m}(u)j_k(ut)u^{2k+1}du, \qquad (1.4.16)$$

где $C_{k,m}$ — постоянная, зависящая только от $k$ и $m$. По равенству Парсеваля

$$\int_0^\infty \left[\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m f(t)\right]^2 t^{2k+1}\,dt=\tilde{C}_{k,m}\int_0^\infty |\hat{f}_{k-m}(u)|^2 u^{2k+1}\,du. \qquad (1.4.17)$$

Полагая в (1.4.16) $k-m=n/2-1+\beta$, будем иметь

$$\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m f(t)=C_n^{(m,\beta)}\int_0^\infty u^{2m}\hat{f}_{n/2-1+\beta}(u)j_{n/2-1+\beta}(ut)u^{n-1+2\beta}\,du. \qquad (1.4.18)$$

Так как справедливо представление (1.4.12), то равенство (1.4.18) можно рассматривать как результат применения к обеим частям (1.4.12) оператора $\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m$. Соответствующее равенство Парсеваля (см. (1.4.17)) запишется в следующей форме:

$$\int_0^\infty \left[t^m\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m f(t)\right]^2 t^{n-1+2\beta}\,dt=$$

$$=\tilde{C}_n^{(m,\beta)}\int_0^\infty u^{2m}|\hat{f}_{n/2-1+\beta}(u)|^2 u^{n-1+2\beta}\,du. \qquad (1.4.19)$$

Наконец, укажем еще один интегро-дифференциальный оператор, соответствующий преобразованию Ганкеля. Заменим в (1.4.10) функцию $f(\tau)$ на $\left(\frac{d}{\tau\,d\tau}\right)^m f(\tau)$. Тогда получим

$$t^{-2\nu-1}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t \tau^{2(\nu+1-\mu)+1}(t^2-\tau^2)^{\mu-1}\left(\frac{d}{\tau\,d\tau}\right)f(\tau)\,d\tau=$$

$$=C_{\nu,\mu}\int_0^\infty u^{2(1-\mu)}\left[\frac{d}{t\,dt}f(t)\right]_{\nu+1-\mu}(u)j_\nu(ut)u^{2\nu+1}\,du, \qquad (1.420)$$

где

$$\left[\frac{d}{t\,dt}f(t)\right]_{\nu+1-\mu}(u)=\int_0^\infty\left[\frac{d}{t\,dt}f(t)\right]j_{\nu+1-\mu}(ut)\,t^{2(\nu+1-\mu)+1}\,dt. \qquad (1.4.21)$$

Полагая в (1.4.15) $k=\nu+1-\mu$, найдем, что

$$\{1/[2^{\nu+1-\mu}\Gamma(2+\nu-\mu)]\}\int\limits_0^\infty\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m f(t)\,j_{\nu+1-\mu}(ut)\,t^{2(\nu+1-\mu)+1}\,dt=$$

$$=\{(-1)^m/[2^{\nu+1-\mu-m}\Gamma(2+\nu-\mu-m)]\}\hat{f}_{\nu+1-m-\mu}(u), \quad (1.4.22)$$

где $\hat{f}_{\nu+1-m-\mu}(u)$ — соответствующее преобразование Ганкеля функции $f$. Сравнивая (1.4.21) и (1.4.22), находим, что в формуле (1.4.20) выражение $\left[\widehat{\frac{d}{t\,dt}f(t)}\right]_{\nu+1-\mu}$ можно с точностью до соответствующей константы заменить на $\hat{f}_{\nu+1-\mu-m}(u)$. Следовательно, получаем

$$t^{-2\nu-1}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^t\tau^{2(\nu+1-\mu)+1}(t^2-\tau^2)^{\mu-1}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^m f(\tau)\,d\tau=$$

$$=C_{\nu,\mu}^{(m)}\int\limits_0^\infty u^{2(1-\mu)}\hat{f}_{\nu+1-\mu-m}(u)\,j_\nu(ut)\,u^{2\nu+1}\,du. \quad (1.4.23)$$

Соответствующее равенство Парсеваля записывается в виде

$$\int\limits_0^\infty\left\{t^{2\nu+1}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^t\tau^{2(\nu+1-\mu)+1}(t^2-\tau^2)^{\mu-1}\left(\frac{d}{\tau\,d\tau}\right)^m f(\tau)\,d\tau\right\}^2 t^{2\nu+1}\,dt=$$

$$=\tilde{C}_{\nu,\mu}^{(m)}\int\limits_0^\infty u^{4(1-\mu)}|\hat{f}_{\nu+1-\mu-m}(u)|^2 u^{2\nu+1}\,du. \quad (1.4.24)$$

Полагая $\nu+1-m=n/2-1+\beta$, $1-\mu=\alpha$, $0<\alpha<1$, равенство (1.4.23) можно записать в следующей форме:

$$t^{-n+1-2m-2\beta+2\alpha}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t(t^2-\tau^2)^{-\alpha}\tau^m\left[\tau^m\left(\frac{d}{\tau\,d\tau}\right)^m f(\tau)\right]\tau^{n-1+2\beta}\,d\tau=$$

$$=C_{n,m}^{(\alpha,\beta)}\int\limits_0^\infty u^{2\alpha}\hat{f}_{n/2-1+\beta}(u)\,j_{n/2-1+\beta+m-\alpha}(ut)\,u^{2m-2\alpha}u^{n-1+2\beta}\,du. \quad (1.4.25)$$

Это равенство можно рассматривать как результат применения к обеим частям представления (1.4.12) интегро-дифференциального оператора, стоящего слева в (1.4.25). Равенство Парсеваля при этом принимает следующий вид:

$$\int\limits_0^\infty\left\{t^{-n+1-2\beta-m+\alpha}\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t(t^2-\tau^2)^{-\alpha}\tau^m\times\right.$$

$$\left.\times\left[\tau^m\left(\frac{d}{\tau\,d\tau}\right)^m f(\tau)\right]\tau^{n-1+2\beta}\,d\tau\right\}^2 t^{n-1+2\beta}\,dt=$$

$$=\tilde{C}_{n,m}^{(\alpha,\beta)}\int\limits_0^\infty u^{2(m+\alpha)}|\hat{f}_{n/2-1+\beta}(u)|^2 u^{n-1+2\beta}\,du. \quad (1.4.26)$$

При $m=0$ мы получаем интегро-дифференциальный оператор, рассмотренный ранее, т. е. оператор из левой части (1.4.11). Дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы, рассмотренные в этом параграфе, в дальнейшем будут использованы при построении соответствующих функциональных пространств в теории сингулярных краевых задач.

## § 1.5. Преобразование Фурье — Бесселя пробных функций. Теорема Пэли — Винера

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}=\{(x, y):\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^1\}$. Под преобразованием Фурье — Бесселя в этом параграфе мы понимаем преобразование, при котором по первой группе переменных действует преобразование Фурье, а по последней переменной действует преобразование Бесселя (Ганкеля). В дальнейшем мы будем пользоваться преобразованием, при котором по первой переменной действует преобразование Фурье, а по остальным переменным действует преобразование Бесселя (Ганкеля). За таким преобразованием мы также сохраняем название преобразование Фурье — Бесселя. Из текста будет ясно, о каком преобразовании идет речь.

Пусть $\varphi(x, y)\in S_+(\mathbb{R}^{n+1})$. Прямое и обратное преобразование Фурье — Бесселя определяются (см. [64]) следующими формулами:

$$F_\nu[\varphi]=\Psi(\sigma, \tau)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty \varphi(x, y)e^{i(x,\sigma)}j_\nu(y\tau)y^{2\nu+1}\,dx\,dy, \tag{1.5.1}$$

$$F_\nu^{-1}[\Psi]=\varphi(x, y)=(2\pi)^{-n}2^{-2\nu}\Gamma^{-2}(\nu+1)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty \Psi(\sigma, \tau)\times$$
$$\times e^{-i(x,\sigma)}j_\nu(y\tau)\tau^{2\nu+1}\,d\sigma\,d\tau, \tag{1.5.2}$$

где $\nu>-1/2$ — постоянная.

Преобразование Фурье — Бесселя изоморфно и непрерывно отображает пространство $S_+$ на себя (см. [64]). Сверткой $f*g$ пробных функций $f$ и $g$ будем называть выражение (см. [64])

$$(f*g)(x, y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty T_y^t f(x-s, y)g(s, t)t^{2\nu+1}\,ds\,dt, \tag{1.5.3}$$

где $s\in\mathbb{R}^n$; $T_y^t$ — оператор обобщенного сдвига, определяемый по формуле (1.3.7).

Если $\varphi(x, y)y^{\nu+1/2}\in L_{2,+}(\mathbb{R}^{n+1})$, то преобразование Фурье — Бесселя $F_\nu[\varphi]$ также принадлежит $L_{2,+}(\mathbb{R}^{n+1})$ с весом $\varphi^{\nu+1/2}$ и имеет место соответствующее равенство Парсеваля (см. [63]). При этом, разумеется, справедливы формулы (1.5.1) и (1.5.2), понимаемые в соответствующем смысле.

Пусть $\varphi(x, y)|y|^{2\nu+1}\in L_1(\mathbb{R}^{n+1})$. Определим преобразование Фурье — Бесселя (см. [100]) по формуле (ср. с (1.5.1))

$$F_\nu[f](\sigma, t)=\hat{f}_\nu(\sigma, t)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(x,\sigma)}j_\nu(gt)f(x, y)|y|^{2\nu+1}\,dx\,dy, \tag{1.5.4}$$

где $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\tau\in\mathbb{R}^1$, $j_\nu(\cdot)$ — нормированная функция Бесселя (см. (1.3.4)). Если $f(x, y)$ — финитная функция, то $\hat{f}_\nu(\sigma, \tau)$ является функцией класса $C_+^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, допускающей аналитическое продолжение в $n+1$-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^{n+1}$ по формуле

$$\hat{f}_\nu(s, \tau)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,s)} j_\nu(y\tau) f(x, y) |y|^{2\nu+1}\, dx\, dy. \tag{1.5.5}$$

Пусть $a_j$, $j=1, ...; n, n+1$,— положительные постоянные, $a=(a_1, ...$ $..., a_n, a_{n+1})$ и $G_{c,a}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^{n+1}: |x_1|\leqslant a_1, ..., |x_n|\leqslant a_n, \ |y|\leqslant a_{n+1}\}$.

Имеет место следующий аналог теоремы Пэли — Винера.

Теорема 1.5.1. *Целая аналитическая функция* $\Psi(s, \tau)$, *четная по переменной* $\tau$, *является преобразованием Фурье — Бесселя функции* $f(x, y)\in C_{+,0}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, *сосредоточенной на множестве* $G_{c,a}$, *тогда и только тогда, когда для любого мультииндекса* $\alpha=(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$, $\alpha_k\geqslant 0$, *существует постоянная* $C_\alpha$ *такая, что*

$$|s_1^{\alpha_1} ... s_n^{\alpha_n} \tau^{\alpha_n+1} \Psi(s, \tau)|\leqslant C_\alpha \exp\Big(\sum_{j=1}^n a_j|\operatorname{Im} s_j|+$$
$$+a_{n+1}|\operatorname{Im}\tau|\Big), \qquad (s, \tau)\in\mathbb{C}^{n+1}. \tag{1.5.6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x, y)\in C_{+,0}^\infty\times$ $\times(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\operatorname{supp} f\in G_{c,a}$. Докажем, что функция $\Psi(s, \tau)=F_\nu[f](s, \tau)$ удовлетворяет оценке (1.5.6). Рассмотрим функцию $F_\nu[\mathscr{D}_x^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}} f(x, y)]$ $(s, \tau)$, где $\alpha'=(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Используя формулу (1.1.6), а также формулу $B_y j_\nu(y\tau)=-\tau^2 j_\nu(y\tau)$, с помощью интегрирования по частям находим, что

$$F_\nu[D_x^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}} f(x, y)](s, \tau)=s^{\alpha'}(-\tau^2)^{\alpha_{n+1}}\Psi(s, \tau), \tag{1.5.7}$$

где $s^{\alpha'}=s_1^{\alpha_1} ... s_n^{\alpha_n}$. Из формулы (1.5.7), а также из формулы

$$j_\nu(z)=[\Gamma(\nu+1)/\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)]\int_{-1}^1 e^{izt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\, dt, \tag{1.5.8}$$

где $z\in\mathbb{C}^1$, $\nu>-1/2$ (см. [8, п. 7.12]), следует оценка

$$|s^{\alpha'}|\,|\tau|^{2\alpha_{n+1}}|\Psi(s, \tau)|\leqslant C_{\alpha', 2\alpha_{n+1}}\,\omega(a), \tag{1.5.9}$$

где

$$C_{\alpha', 2\alpha_{n+1}}=\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\mathscr{D}_x^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}} f(x, y)|\,|y|^{2\nu+1}\, dx\, dy,$$

$$\omega(a)=\exp\Big(\sum_{j=1}^n a_j|\operatorname{Im} s_j|+a_{n+1}|\operatorname{Im}\tau|\Big).$$

Из неравенства (1.5.9) и неравенства, получаемого из (1.5.9) заменой $\alpha_{n+1}$ на $\alpha_{n+1}+1$, следует оценка

$$|s^{\alpha'}|\cdot|\tau|^{2\alpha_{n+1}+2}|\Psi(s, \tau)|\leqslant\omega(a)\cdot\min\left(|\tau|\, C_{\alpha', 2\alpha_{n+1}};\ \frac{C_{\alpha', 2\alpha_{n+1}}}{|\tau|}\right). \tag{1.5.10}$$

Используя оценку (1.5.10) и рассматривая отдельно случаи

$|\tau|\leqslant\left(\frac{C_{\alpha', 2\alpha_{n+1}+2}}{C_{\alpha', 2\alpha_{n+1}}}\right)^{1/2}$ и $|\tau|\geqslant\left(\frac{C_{\alpha', 2\alpha_{n+1}+2}}{C_{\alpha', 2\alpha_{n+1}}}\right)^{1/2}$, находим, что в каждом из них (следовательно, для всех $\tau$) имеет место оценка

$$|s^{\alpha'}|\cdot|\tau|^{2\alpha_{n+1}+1}|\Psi(s, \tau)|\leqslant C_{\alpha', 2\alpha_{n+1}+1}\,\omega(a). \tag{1.5.11}$$

Из (1.5.9) и (1.5.11) получаем оценку (1.5.6).

Достаточность. Рассмотрим вначале случай $n=1$. Пусть $\Psi(s)$, $s\in\mathbb{C}^1$,— четная аналитическая во всей комплексной плоскости функция, удовлетворяющая для любого $m=0, 1, \dots$ оценке

$$|s^m\Psi(s)|\leqslant C_m\exp(a|\operatorname{Im} s|), \tag{1.5.12}$$

где $C_m$ и $a$ — положительные постоянные.

Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=C_{\nu, 1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} j_\nu(x\sigma)\Psi(\sigma)|\sigma|^{2\nu+1}d\sigma, \qquad x\in\mathbb{R}^1, \tag{1.5.13}$$

где $C_{\nu, 1}=[2^{2\nu+2}\Gamma^2(\nu+1)]^{-1}$.

Из формулы (1.5.8) и оценки (1.5.12) следует, что $f\in C_+^\infty(\mathbb{R}^1)$. Покажем, что функция $f(x)$ финитна, причем $\operatorname{supp} f\subset[-a, a]$. В случае $\nu=1/2$, $j_\nu(z)=\cos z$ данное утверждение следует из обычной теоремы Пэли — Винера.

Запишем функцию $j_\nu(z)$, $\nu>-1/2$ в виде

$$j_\nu(z)=h_\nu^{(1)}(z)+h_\nu^{(2)}(z), \tag{1.5.14}$$

где

$$h_\nu^{(j)}(z)=2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)z^{-\nu}H_\nu^{(j)}(z),$$

$j=1, 2$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ — функции Ганкеля.

Пусть $|\nu|<1/2$. Тогда, используя формулу (1.5.14), а также соответствующее интегральное представление функций Бесселя (Ганкеля) (см. [8, п. 7.12 формулы (12), (13), (28), (29)]), находим, что

$$f(x)=\int\limits_0^\infty[g_\nu^{(1)}(x, \sigma)+g_\nu^{(2)}(x, \sigma)]\Psi(\sigma)d\sigma, \qquad x>0, \tag{1.5.15}$$

где

$$g_\nu^{(1)}(x, s)=C_\nu s e^{ixs}\int\limits_0^\infty e^{ixst}(t^2+2t)^{-\nu-1/2}dt \tag{1.5.16}$$

для $\operatorname{Re}s\geqslant0$, $\operatorname{Im}s\geqslant0$, $s\neq0$;

$$g_\nu^{(2)}(x, s)=-C_\nu e^{-ixs}\int\limits_0^\infty e^{-ixs}(t^2+2t)^{-\nu-1/2}dt, \tag{1.5.17}$$

для $\operatorname{Re}s\geqslant0$, $\operatorname{Im}s\leqslant0$, $s\neq0$, $C_\nu=\dfrac{1}{2i\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}$. Если положить $g_\nu^{(1)}(x, 0)=g_\nu^{(2)}(x, 0)=0$, то мы получим, что функции $g_\nu^{(j)}(x, s)$, $j=1, 2$, аналитичны по $s$ соответственно в областях $\mathcal{M}_j=\{s\in\mathbb{C}^1$: $\operatorname{Re}s>0, (-1)^j\operatorname{Im}s<0\}$, $j=1, 2$, и непрерывны по $s$ на $\bar{\mathcal{M}}_j$, $j=1, 2$.

Пусть $A$, $T$ — положительные постоянные, $\gamma_{A,T}$ — граница прямоугольника $P_{A,T}=\{s\in\mathbb{C}^1$: $0<\operatorname{Re}s<A$, $0<\operatorname{Im}s<T\}$ и $\eta_{A,T}$ — граница

прямоугольника, симметричного к $P_{A,T}$ относительно вещественной оси. Из теоремы Коши следует, что

$$\int\limits_{\gamma^{+}_{A,T}} g_{\nu}^{(1)}(x, s)\Psi(s)\,ds + \int\limits_{\eta^{-}_{A,T}} g_{\nu}^{(2)}(x, s)\Psi(s)\,ds = 0. \qquad (1.5.18)$$

Учитывая, что функция $\Psi(s)$ — четная, имеем

$$\int\limits_{0}^{T} g_{\nu}^{(1)}(x, i\tau)\Psi(i\tau)\,d\tau = \int\limits_{-T}^{0} g_{\nu}^{(2)}(x, i\tau)\Psi(i\tau)\,d\tau. \qquad (1.5.19)$$

Переходя теперь в равенстве (1.5.18) к пределу при $A\to\infty$ с учетом оценки (1.5.12) и равенства (1.5.19), находим, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} [g_{\nu}^{(1)}(x, \sigma)+g_{\nu}^{(2)}(x, \sigma)]\Psi(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_{0}^{\infty} [g_{\nu}^{(1)}(x, \sigma+iT)\Psi(\sigma+iT)+$$
$$+g_{\nu}^{(2)}(x, \sigma-iT)\Psi(\sigma-iT)]\,d\sigma. \qquad (1.5.20)$$

Из формул (1.5.15)—(1.5.17) и оценки (1.5.12) следует оценка

$$|f(x)|\leqslant C\exp(T(a-x)), \qquad x>0,$$

где $C$ — положительная постоянная, не зависящая от $T$. Переходя в (1.5.20) к пределу при $T\to\infty$ и учитывая, что $f(x)$ — четная, находим, что $f(x)\equiv 0$ при $|x|>a$. Из формулы обращения для преобразования Фурье — Бесселя теперь следует, что

$$\Psi(s)=F_{\nu}[f](s), \qquad s\in\mathbb{C}^1.$$

Следовательно, функция $f(x)$, определенная по формуле (1.5.13), обладает требуемым свойством.

Рассмотрим случай $\nu\geqslant 1/2$. Пусть $l\geqslant 1$ — целое число такое, что $l-1/2\leqslant\nu<l+1/2$. Пусть

$$v(x)=C_{\nu-l,1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_{\nu-l}(x\sigma)\Psi(\sigma)|\sigma|^{2\nu+1}\,d\sigma, \qquad x\in\mathbb{R}^1. \qquad (1.5.21)$$

Так как $-1/2\leqslant\nu-l<1/2$, то по доказанному $v(x)\in C^{\infty}_{+,0}(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} v\subset[-a, a]$ и $\Psi(s)=F_{\nu-l}[v]$, $s\in\mathbb{G}^1$. Используя формулу (1.5.13), получаем, что

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^{l} v(x)=C^{(\nu,l)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\nu-l}[v]j_{\nu}(x\sigma)|\sigma|^{2\nu+1}\,d\sigma,$$

где $C^{(\nu,l)}=(-1)^l\,[2^{2\nu+l+2}\Gamma(\nu+1-l)\Gamma(\nu+1)]^{-1}$, откуда находим, что

$$f(x)=\tilde{C}_{\nu,l}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{l} v(x), \qquad (1.5.22)$$

где $\tilde{C}_{\nu,l}=C_{\nu,1}/C^{(\nu,l)}$.

Из установленных выше свойств функции $v$ и из (1.5.23) следует, что $f(x)\in C^{\infty}_{+,0}(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp} f\subset[-a, a]$, и по формуле обращения преобразования Фурье — Бесселя $\Psi(s)=F_{\nu}[f](s)$, $s\in\mathbb{C}^1$. Таким образом, достаточность в случае $n=1$ доказана.

В случае $n>1$ вместо формулы (1.5.13) нужно воспользоваться формулой обратного преобразования Фурье — Бесселя (см. выше формулу (1.5.4))

$$f(x)=F_\nu^{-1}[\Psi](x, y)=C_{\nu,n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-i(x,\sigma)}j_\nu(y\tau)\Psi(\sigma, \tau)|\tau|^{2\nu+1}\,d\sigma\,d\tau,$$

где $(x, y)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $C_{\nu,n}=[\pi^n 2^{2\nu+2+n}\Gamma^2(\nu+1)]^{-1}$, $\Psi(\sigma, \tau)=\hat{f}_\nu(\sigma, \tau)$ (ср. с формулой (1.5.2)). Дальнейшее доказательство проводится с помощью приведенных выше рассуждений и рассуждений, используемых при доказательстве обычной теоремы Пэли — Винера (см., например, [176, с. 135—136, 147—148]).

## § 1.6. Преобразование Фурье — Бесселя распределений

Из теоремы 1.5.1 предыдущего параграфа вытекает, что преобразование Фурье — Бесселя является линейным непрерывным изоморфизмом пространства $\mathscr{D}_+$ на $Z_+$.

Преобразование Фурье — Бесселя $\hat{f}_\nu=F_\nu[f]$ функционала $f\in\mathscr{D}'_+$ определим как функционал из пространства $Z_+$, действующий по формуле

$$(F_\nu[f], \Psi)=\frac{1}{C_{\nu,n}}(f, F_\nu^{-1}[\Psi]), \qquad \Psi\in Z_+ \tag{1.6.1}$$

(см. предыдущий параграф).

Преобразование $F_\nu$ изоморфно и непрерывно отображает пространства $\mathscr{D}_+$ на $Z_+$. Обратное преобразование задается по формуле

$$(F_\nu^{-1}[g], \varphi)=C_{\nu,n}(g, F_\nu[\varphi]), \qquad g\in Z'_+, \quad \varphi\in\mathscr{D}_+. \tag{1.6.2}$$

Заметим, что преобразование Фурье — Бесселя является непрерывным автоморфизмом пространства $S'_+$. Имеют место формулы (см. [64, 69])

$$F_\nu(\delta_B)=1,$$

$$F_\nu[P(\mathscr{D}_x, B_y)f](s, \tau)=P(s, -\tau^2)F_\nu[f](s, \tau), \tag{1.6.3}$$

$$P(\mathscr{D}_s, B_c)[F_\nu[f](s, \tau)]=F_\nu[P(-x, -y^2)f](s, c), \tag{1.6.4}$$

где $P(s, \tau)$ — произвольный многочлен с постоянными коэффициентами.

Пусть $f\in\Phi'_+=\Phi'_+(\mathbb{R}^{n+1})$ — финитный функционал. Тогда, как легко видеть, имеет место формула

$$\hat{f}_\nu(\sigma, t)=(\overline{f(x, y)}, \quad e^{i(x,\sigma)}j_\nu(yt)),$$

которая доказывается с помощью тех же рассуждений, что и соответствующая формула преобразования Фурье финитного функционала из $\mathscr{D}'$ (см., например, [21, гл. 2, § 3, п. 4]). При этом $\hat{f}_\nu(s, t)\in C_+^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ и допускает аналитическое продолжение в комплексное пространство $\mathbb{C}^{n+1}$ по формуле

$$\hat{f}_\nu(s, \tau)=(f(x, y), e^{i(x,s)}j_\nu(y\tau)), \qquad (s, \tau)\in\mathbb{C}^{n+1}. \tag{1.6.5}$$

Имеет место

Лемма 1.6.1. *Пусть* $f \in \Phi'_+$, *причем* $\operatorname{supp} f \subset G_{c,a} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}: |x_1| \leqslant a_1; \ldots; x_n \leqslant a_n, |y| \leqslant a_{n+1}\}$. *Тогда найдутся постоянные* $C>0$, $N>0$ *такие, что*

$$|\hat{f}_\nu(s,\tau)| \leqslant C(1+\sqrt{|s|^2+|y|^2})^N \exp\left(\sum_{j=1}^n a_j |\operatorname{Im} s_j| + a_{n+1} |\operatorname{Im}\tau|\right), \quad (s,\tau) \in \mathbb{C}^{n+1}. \tag{1.6.6}$$

Доказательство. Согласно теореме 1.1.2 имеет место оценка

$$|(f,\varphi)| \leqslant \tilde{C} \sup_{\substack{(x,y)\in G_{c,a} \\ |\alpha| \leqslant N}} |\mathscr{D}^\alpha_{x,y} \varphi(x,y)| \quad \forall \varphi \in C^\infty_+(\mathbb{R}^{n+1}), \tag{1.6.7}$$

где $\tilde{C}>0$, $N \geqslant 0$ — некоторые постоянные.

Полагая в неравенстве (1.6.7) $\varphi(x,y) = e^{i(x,s)} j_\nu(y\tau)$ и использу формулы (1.6.5) и (1.5.8), получим оценку (1.6.6).

Следствие 1.6.1. *Если* $f \in \Phi'_+$, *то* $\hat{f}_\nu(s,\tau)$ *является мультипликатором в пространстве* $Z_+$.

## § 1.7. Преобразование Фурье — Бесселя распределения $r^\lambda$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty r^\lambda e^{i(x,\sigma)} j_\nu(yt) y^{2\nu+1}\, dx\, dy, \tag{1.7.1}$$

где $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + y^2$. Интеграл (1.7.1) сходится при $-\gamma < \operatorname{Re}\lambda < 0$, $\gamma = n+2+2\nu$, причем несобственный интеграл (1.7.1) можно понимать как предел $I = \lim_{R\to\infty} I_R$, где

$$I_R = \iint_{Q_R} r^\lambda e^{i(x,\sigma)} j_\nu(yt) y^{2\nu+1}\, dx\, dy, \tag{1.7.2}$$

$$Q_R = \{(x,y) \in R^{n+1}: 0 \leqslant r \leqslant R\}.$$

Перейдем в (1.7.2) к сферическим координатам $x$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ в подпространстве $(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда будем иметь

$$I_R = \int_0^R x^{n-1}\, dx \int_\Omega e^{i(x,|\sigma|\cos\Psi)}\, d\Omega \int_0^{\sqrt{R^2+x^2}} (x^2+y^2)^{\lambda/2} j_\nu(ty) y^{2\nu+1}\, dy =$$

$$= (2\pi)^{n/2-1} s^{1-n/2} \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} r^\lambda J_{n/2-1}(sx) j_\nu(ty) x^{n/2} y^{2\nu+1}\, dy, \tag{1.7.3}$$

где $s = |\sigma| = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)^{1/2}$; $r^2 = x^2+y^2$, а $d\Omega$ — элемент площади единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. При этом использована формула (см. [20])

$$\int_\Omega e^{i\rho\cos\Psi}\, d\Omega = (2\pi)^{n/2-1} (\rho s)^{1-n/2} J_{n/2-1}(\rho s).$$

Так как $j_\nu(x)=2^\nu\Gamma(\nu+1)x^{-\nu}J_\nu(x)$, то

$$I_R=(2\pi)^{n/2-1}2^\nu\Gamma(\nu+1)s^{1-n/2}t^{-\nu}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} r^\lambda J_{n/2-1}(sx)\times$$
$$\times J_\nu(ty)x^{n/2}y^{\nu+1}\,dx\,dy. \quad (1.7.4)$$

Вводя полярную систему координат по формулам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, имеем для (1.7.4) следующее представление:

$$I_R=C_{\nu,n}s^{1-n/2}t^{-\nu}\int_0^R r^{\lambda+\nu+2+n/2}\,dr\int_0^{\pi/2}J_\nu(tr\sin\varphi)\times$$
$$\times J_{n/2-1}(sr\cos\varphi)\sin^{\nu+1}\varphi\cos^{n/2}\varphi\,d\varphi, \quad (1.7.5)$$

где $C_{\nu,n}=(2\pi)^{n/2-1}2^\nu\Gamma(\nu+1)$.

Внутренний интеграл в (1.7.5) представляет собой второй определенный интеграл Сонина (см. [14]). Поэтому имеем

$$I_R=C_{\nu,n}\rho^{-\lambda-\gamma}\int_0^R J_{\nu+n/2}(\tau)\tau^{\lambda+\nu+n/2+1}\,d\tau, \quad (1.7.6)$$

где $\rho^2=s^2+t^2$.

Итак,

$$I=\lim_{R\to\infty}I_R=C_{\nu,n}\rho^{-\lambda-\gamma}\int_0^\infty J_{\nu+n/2}(\tau)\tau^{\lambda+\nu+n/2+1}\,d\tau. \quad (1.7.7)$$

Интеграл (1.7.7) есть не что иное, как несобственный интеграл Вебера (см. [14]), абсолютно сходящийся при $-\gamma<\mathrm{Re}\lambda<\gamma/2-1$. Окончательно имеем

$$F_\nu[r^\lambda]=C_\lambda^{(\nu,n)}\rho^{-\nu-\gamma}, \quad (1.7.8)$$

где

$$C_\lambda^{(\nu,n)}=2^{\lambda+\gamma+2}\pi^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+\gamma}{2}\right)/\Gamma(-\lambda/2),$$
$$k=2\nu+1;\quad \gamma=n+k+1.$$

Так как обе части равенства (1.7.8) являются аналитическими функциями $\lambda$, то оно остается справедливым при всех $\lambda$. Совершенно аналогично интеграл (1.7.1) вычисляется для случая $n=1$, только вместо интеграла Сонина нужно применить определенный интеграл Гегенбауэра [14].

Обычным путем можно получить формулы преобразования Фурье—Бесселя распределений-коэффициентов в разложении $r^\lambda$ в ряды Тейлора и Лорана.

Из формулы (1.2.14) находим

$$F_\nu[r^\lambda]=F_\nu[r^{\lambda_0}]+(\lambda-\lambda_0)F_\nu[r^{\lambda_0}\ln r]+\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2F_\nu[r^{\lambda_0}\ln^2 r]+\ldots$$

С другой стороны, разлагая $F_\nu(r^\lambda)=C_\lambda\rho^{-\lambda-\gamma}$ в окрестности $\lambda_0$ в ряд Тейлора, имеем

$$C_\lambda\rho^{-\lambda-\gamma}=C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-\gamma}+(\lambda-\lambda_0)[C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-\gamma}+C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-\gamma}\ln\rho]+\ldots$$

Сравнивая коэффициенты в последних двух разложениях, получаем

$$F_\nu\left[r^\lambda \ln r\right]=C'_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-\gamma}+C_{\lambda_0}\rho^{-\lambda_0-\gamma}\ln\rho \qquad (1.7.9)$$

и т. д. Из формулы (см. (1.2.17))

$$r^\lambda=\frac{\delta_B^{(2p)}(r)}{(2p)!}\,\frac{1}{(\lambda+\gamma+2p)}+r^{-2p-\gamma}+(\lambda+\gamma+2p)r^{-2p-\gamma}\ln r+\ldots, \qquad (1.7.10)$$

дающей разложение $r^\lambda$ в ряд Лорана в окрестности $\lambda=-\gamma-2p$, имеем

$$F_\nu(r^\lambda)=\frac{1}{(2p)!}\,\frac{F_\nu\left[\delta_B^{(2p)}(r)\right]}{\lambda+\gamma+2p}+F_\nu\left[r^{-2p-\gamma}\right]+(\lambda+\gamma+2p)F_\nu\left[r^{-2p-\gamma}\ln r\right]+\ldots$$

Кроме того, в окрестности этой точки

$$C_\lambda\rho^{-\lambda-\gamma}=\frac{C_{-1}^{(\gamma+2p)}\rho^{2p}}{\lambda+\gamma+2p}+\left(C_{-1}^{(\gamma+2p)}\rho^{2p}\ln\rho+C_\nu^{(\gamma+2p)}\rho^{2p}\right)+\ldots$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты двух последних разложений, получаем

$$\frac{1}{(2p)!}\,F_\nu\left[\delta_B^{(2p)}(r)\right]=C_{-1}^{(\gamma+2p)}\rho^{2p},$$

$$F_\nu\left(r^{-\gamma-2p}\right)=C_{-1}^{(\gamma+2p)}\rho^{2p}\ln\rho+C_0^{(\gamma+2p)}\rho^{2p}$$

и т. д.; числовые коэффициенты $C_{-1}^{(\gamma+2p)}$, $C_0^{(\gamma+2p)}$, ... суть коэффициенты разложения в ряд Лорана функции

$$C_\lambda=2^{\lambda+\gamma-2}\pi^{n/2-1}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{-\lambda}{2}\right)$$

в окрестности $\lambda=-\gamma-2p$.

## § 1.8. Обобщенная свертка и ее свойства

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}=\{(x, y)\colon x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^1\}$ и пусть $Q$ — некоторое множество из $\mathbb{R}^{n+1}$, $n\geqslant 0$. Символом $Q^\varepsilon$ будем обозначать $\varepsilon$-окрестность множества $Q$. Через $\Gamma_Q^0$ будем обозначать проекцию множества $Q$ на гиперплоскость $\{y=0\}$, а через $\Gamma_{Q,a}$ — сечение множества $Q$ прямой $x=a$, $a=(a_1, \ldots, a_n)$ и $a\in\Gamma_Q^0$, $n\geqslant 1$. Положим

$$y^{\max}(a, Q)=\sup_{(x, y)\in\Gamma_{Q,a}}|y|, \quad a\in\Gamma_Q^0, \quad n\geqslant 1;$$

$$N_{(x,y)}^{\xi,j}(Q)=\{(x, y)\in\mathbb{R}^{n+1}|_{x=\xi'+a},\quad y=(-1)^j|\xi_{n+1}|+$$
$$+ty^{\max}(a, Q);\quad -1\leqslant t\leqslant 1,\quad a\in\Gamma_Q^0\},$$

$$\xi=(\xi', \xi_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1},\quad \xi'=(\xi_1, \ldots, \xi_n),\quad n\geqslant 2,\ j=1,\ 2;$$

$$N_{(x,y)}^{\xi}(Q)=N_{(x,y)}^{\xi,1}(Q)\cap N_{(x,y)}^{\xi,2}(Q).$$

Нижний индекс в обозначении множества $N_{(x,y)}^{\xi}(Q)$ указывает на то, как обозначаются точки этого множества. Заметим, что если $y^{\max}(a, Q)=\infty$ для некоторого $a\in\Gamma_Q^0$, то приведенная выше запись для

значений $y$ означает, что соответствующие значения $y$ изменяются в интервале $(-\infty, \infty)$.

В случае $n=0$ множество $N_{(x,y)}^{(\xi',\xi_{n+1})}(Q)$ определяется аналогично. Напомним структуру (см. формулу (1.3.7)) оператора обобщенного сдвига $T_x^y$, действующего по формуле

$$T_x^y v(x)=\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}\int\limits_0^\pi v\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right)\sin^{k-1}\theta\,d\theta,$$

где $x, y\in\mathbb{R}^1$, $v(x)\in C_+(\mathbb{R}^1)$.

Свойства этого оператора изучались в [15], [131]. Часть из них отмечалась в § 1.3. Заметим, что $T_x^y v(x)$ — четная функция по каждой из переменных $x$, $y$.

Если $v(x)\in C_+^\infty(\mathbb{R}^1)$, то $T_x^y v(x)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$ по $x$, $y$. Также известно (см. [131]), что если $v\in C_+(\mathbb{R}^1)$ финитна и $\mathbb{R}_+^1\cap\operatorname{supp} v\subset[a, b]$, где $\mathbb{R}_1^+=\{x\in\mathbb{R}^1\colon x>0\}$, $b>a\geqslant 0$, то для каждого фиксированного $y\in\mathbb{R}^1$

$$\operatorname{supp} T_x^y v(x)\subset[-|y|-b;\ -|y|+b]\cup[|y|-b;\ |y|+b]. \tag{1.8.1}$$

Отсюда следует, что для любой функции $v\in C_+(\mathbb{R}^{n+1})$, $n\geqslant 0$, и каждого фиксированного $\xi=(\xi', \xi_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$ имеет место вложение

$$\operatorname{supp} T_y^{\xi_{n+1}} v(x-\xi', y)\subset N_{(x,y)}^{\xi}(\operatorname{supp} v). \tag{1.8.2}$$

Пусть $n=0$ и $\varphi(x)\in S_+$. Тогда, как известно (см. [36]), $T_x^\xi\varphi(x)\in S_+$ для каждого фиксированного $\xi\in\mathbb{R}^1$. При этом, если $\varphi\in\mathscr{D}_+$, то из (1.8.1) следует, что $T_x^\xi\varphi(x)\in\mathscr{D}_+$. Используя формулу (см. [36])

$$F_\nu[T_x^\xi\varphi(x)](y)=j_\nu(y\xi)F_\nu[\varphi(x)](y),\qquad \varphi\in S_+,\quad x, y, \xi\in\mathbb{R}^1,$$

а также формулу (1.6.3), находим, что преобразования Фурье—Бесселя (преобразование Ганкеля) каждого из выражений $B_x T_x^\xi\varphi(x)$ и $T_x^\xi B_x\varphi(x)$ совпадают. Следовательно,

$$B_x T_x^\xi\varphi(x)=T_x^\xi B_x\varphi(x),\qquad \xi, x\in\mathbb{R}^1. \tag{1.8.3}$$

Определим теперь обобщенный сдвиг функционала $f\in\mathscr{D}'_+$ по формуле

$$(T_y^{\xi_{n+1}} f(x-\xi', y),\ \varphi(x, y))=(f(x, y),\ T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi', y)), \tag{1.8.4}$$
$$\xi=(\xi', \xi_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1},\qquad \varphi\in\mathscr{D}_+.$$

Используя равенство (1.8.3) и определение оператора обобщенного сдвига, находим, что для любых мультииндексов $\alpha=(\alpha', \alpha_{n+1})$, $\alpha'=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(\alpha_k\geqslant 0,\ k=1, \ldots, n, n+1)$

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}}|\mathscr{D}_x^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}} T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi', y)|=\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}}|T_y^{\xi_{n+1}}\mathscr{D}_x^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}}\varphi(x+\xi', y)|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}}|\mathscr{D}_x^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}}\varphi(x, y)|, \tag{1.8.5}$$

Из оценки (1.8.5), теоремы 1.1.1 и леммы 1.1.2 вытекает, что функционал $T_y^{\xi_{n+1}} f(x-\xi', y)$ принадлежит $\mathscr{D}'_+$.

Наша дальнейшая цель состоит в изучении обобщенной свертки функционалов $f$, $g\in\mathscr{D}'_+$. Предположим сначала, что $f\in L^{\text{loc}}_{1,k,+}(\mathbb{R}^{n+1})$ (см. [122]), $g\in C_+(\mathbb{R}^{n+1})$ и для любого $(x, y)\in\mathbb{R}^{n+1}$ существует интеграл

$$(f*g)(x, y)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} f(\xi', \xi_{n+1})\, T_y^{\xi_{n+1}} g(x-\xi', y)\,|\xi_{n+1}|^k\, d\xi'\, d\xi_{n+1}. \qquad (1.8.6)$$

Интеграл (1.8.6) будем называть обобщенной сверткой обычных функций (см. также формулу (1.5.3) из § 1.5). Покажем, что

$$\operatorname{supp}(f*g)\subset V(f, g), \qquad (1.8.7)$$

где

$$V(g, f)=\bigcup_{\xi\in\operatorname{supp} f} N_{(x, y)}^{(\xi', \xi_{n+1})}(\operatorname{supp} g). \qquad (1.8.8)$$

Без ограничения общности можно считать, что $V(f, g)\neq\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $(x^0, y^0)\in\operatorname{supp}(f*g)$. Предположим, что $(x^0, y^0)\in V_1=\mathbb{R}^{n+1}\setminus V(f, g)$. Так как $V_1$ открыто, то точка $(x^0, y^0)$ входит в него вместе с некоторой окрестностью $Q(x^0, y^0)$. Для всех $(x, y)\in Q(x^0, y^0)$ и $\xi\in\operatorname{supp} f$, согласно (1.8.2), имеем $T_y^{\xi_{n+1}} g(x-\xi', y)=0$ и, следовательно, $(f*g)(x, y)=0$ для всех $(x, y)\in Q(x^0, y^0)$. Однако это противоречит тому, что $(x^0, y^0)\in\operatorname{supp}(f*g)$. Тем самым вложение (1.8.7) доказано.

Пусть $g\in\mathscr{D}'_+$ и $\varphi\in\mathscr{D}_+$. Рассмотрим функцию

$$\eta_{g,\varphi}(\xi)=(g(x, y);\ T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi', y)), \qquad \xi=(\xi', \xi_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

С помощью обычных рассуждений (см., например, [19, гл. I, § 3]) легко показать, что $\eta_{g,\varphi}\in C^\infty_+$. Кроме того, имеет место вложение

$$\operatorname{supp}\eta_{g,\varphi}\subset H(g, \varphi), \qquad (1.8.9)$$

где

$$H(g, \varphi)=\overline{\bigcup_{(x, y)\in\operatorname{supp} g} N_\xi^{(-x, -y)}(\operatorname{supp}\varphi)}.$$

Действительно, заменяя в (1.8.2) $(x, y)$ и $\xi=(\xi', \xi_{n+1})$ соответственно, а затем $(x, y)$ на $(-x, -y)$, получим, что для каждого фиксированного $(x, y)\in\mathbb{R}^{n+1}$

$$\operatorname{supp} T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi', y)\subset N_{(\xi', \xi_{n+1})}^{(-x, -y)}(\operatorname{supp}\varphi). \qquad (1.8.10)$$

Повторяя теперь дословно те же рассуждения, что и при доказательстве вложения (1.8.7), с заменой в них $\xi=(\xi', \xi_{n+1})$ на $(x, y)$, $f$ на $g$ и $V(f, g)$ на $H(g, \varphi)$ и выбирая число $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы окрестность точки $\xi^0=(\xi'^0, \xi^0_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus H(g, \varphi)$ принадлежала множеству $\mathbb{R}^{n+1}\setminus N_{(\xi', \xi_{n+1})}^{(-x, -y)}(\operatorname{supp}\varphi)$, с учетом (1.8.10) убеждаемся в справедливости вложения (1.8.9).

Из (1.8.9) следует, в частности, что если финитен функционал $g$, то финитна и функция $\eta_{g,\varphi}$.

Для функционалов $f$, $g\in\mathscr{D}'_+$ определим обобщенную свертку $f*g$ по формуле

$$(f*g;\ \varphi)=(f(\xi);\ \eta_{g,\varphi}(\xi)), \qquad \varphi\in\mathscr{D}_+.$$

Свертка $f*g$ существует и определяет функционал из $\mathscr{D}'_+$, если один из функционалов $f$ или $g$ финитен. В этом случае для любых мультииндексов $\alpha=(\alpha', \alpha_{n+1})$, $\alpha'=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ \alpha_k \geqslant 0)$ имеет место равенство

$$\mathscr{D}_x^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}}(f*g)=\mathscr{D}_x^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}} f*g=f*\mathscr{D}_x^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}} g. \tag{1.8.11}$$

Формула (1.8.11) доказывается с помощью тех же рассуждений, что и для обычной свертки. Легко видеть также, что

$$f*\delta=\delta*f=f.$$

Кроме того, справедлива теорема о непрерывности обобщенной свертки, аналогичная теореме о непрерывности обычной свертки (см., например, [176, гл. II, § 12]).

Имеет место

Теорема 1.8.1. *Если $f\in\mathscr{D}'_+$ и $g\in C^{\infty}_{+,0}$, то свертка $f*g$ является обычной функцией класса $C^{\infty}_{+}(\mathbb{R}^{n+1})$, причем $f*g=g*f$.*

Доказательство. Используя определение обобщенной свертки и свойства самосопряженности оператора обобщенного сдвига (см. [36] и § 1.3), имеем

$$(f*g, \varphi)=\Big(f(\xi', \xi_{n+1}), \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \overline{g(x, y)}\,[T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi')y]\,|y|^k\,dx\,dy\Big)=$$

$$=\Big(f(\xi), \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} [T_y^{\xi_{n+1}} g(x-\xi';\ y)]\,\varphi(x, y)\,|y|^k\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} (f*g)(x, y)\,\varphi(x, y)\,|y|^k\,dx\,dy, \qquad \varphi\in\mathscr{D}_+, \tag{1.8.12}$$

где

$$(f*g)(x, y)=\overline{\big(f(\xi), T_y^{\xi_{n+1}}\overline{g(x-\xi', y)}\big)}=\overline{\big(f(\xi', \xi_{n+1})}, T_y^{\xi_{n+1}} g(x'+\xi', y)\big)$$

–функция класса $C^{\infty}_{+}(\mathbb{R}^{n+1})$. Законность внесения функционала $f(\xi)$ под знак интеграла обосновывается здесь обычным образом (см. [21, гл. II, § 3, п. 4]). Аналогично

$$(g*f, \varphi)=$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} g(\xi', \xi_{n+1})\big(f(x, y), T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi', y)\big)\,|\xi_{n+1}|^k\,d\xi'\,d\xi_{n+1}=$$

$$=\Big(f(x, y), \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \overline{g(\xi)}\,[T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi', y)]\,|\xi_{n+1}|^k\,d\xi'\,d\xi_{n+1}\Big)=$$

$$=(f*g, \varphi), \qquad \varphi\in\mathscr{D}_+. \tag{1.8.13}$$

Доказательство бесконечной дифференцируемости свертки тривиально.

Теорема 1.8.2 (коммутативность обобщенной свертки). *Если $f\in\mathscr{D}'_+$, $g\in\Phi'_+$, то $f*g=g*f$.*

Доказательство. Так как $\mathscr{D}_+$ плотно в $\mathscr{D}'_+$ и тем более в $\Phi'_+$, то найдется последовательность $\varphi_m\in\mathscr{D}_+$, $m=1, 2, \ldots$, сходящаяся в $\mathscr{D}'_+$ к функционалу $g$. В силу теоремы 1.8.1 $f*\varphi_m=\varphi_m*g$, $m=1, 2, \ldots$ Переходя в последнем равенстве к пределу при $m\to\infty$, получим (1.8.13).

Теорема 1.8.3. *Если $f, g \in \mathscr{D}'_+$ и один из функционалов финитный, то имеет место вложение*

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset W(f, g), \tag{1.8.14}$$

*где* $W(f, g) = V(f, g) \cap V(g, f)$, $V(f, g)$ — *множество, определяемое по формуле* (1.8.8).

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать справедливость вложения (1.8.7) для функционалов $f$ и $g$ и воспользоваться теоремой 1.8.2.

Если $f \in \mathscr{D}'_+$ и $g \in C^\infty_+$, то вложение (1.8.7) можно доказать с помощью формулы (1.8.12) и рассуждений, использованных при доказательстве вложения (1.8.9).

Предположим, что $f \in \mathscr{D}'_+$ и $g \in \Phi'_+$. Пусть $\omega(x, y)$ — функция класса $C^\infty_{+,0}(\mathbb{R}^{n+1})$, сосредоточенная в шаре $\sqrt{x^2+y^2}<1$ и такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega(x, y)|y|^k\, dx\, dy = 1.$$

Пусть $\omega_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-n-1-k}\omega(x/\varepsilon, \quad y/\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Тогда $\omega_\varepsilon(x, y) \to \delta_B(x, y)$ в пространстве $\mathscr{D}'_+$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим последовательность функций $g_j = g*\omega_1/j$, $j=1, 2, 3$. Так как $\omega_{1/j} \in C^\infty_{+,0}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\operatorname{supp}\omega_{1/j} \subset U_{1/j} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}: |x|^2+y^2 < 1/j^2\}$, то

$$\operatorname{supp} g_j \subset \overline{\bigcup_{\xi \in \operatorname{supp} g} N^{(\xi', \xi_{n+1})}_{(x, y)}(U_{1/j})}. \tag{1.8.15}$$

Используя вложение (1.8.15) и определение множества $N^{(\xi', \xi_{n+1})}_{(x, y)}(U_{1/j})$, легко видеть, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $j_\varepsilon$ такой, что при всех $j \geqslant j_\varepsilon$

$$\operatorname{supp}(f*g_j) \subset V(f, g_j) \subset \overline{\bigcup N^{(\xi', \xi_{n+1})}_{(x, y)}(\operatorname{supp} g)^\varepsilon}. \tag{1.8.16}$$

В силу теоремы 1.8.1 и вложения (1.8.16) имеем $g_j \in C^\infty_{+,0}(\mathbb{R}^{n+1})$. Отсюда и из предыдущего следует, что при $j \geqslant j_\varepsilon$

$$\operatorname{supp} g_j \subset (\operatorname{supp} g)^\varepsilon. \tag{1.8.17}$$

В силу свойств непрерывности обобщенной свертки $g_j \to g*\delta_B = g$, $g_j*f \to f$ при $j \to \infty$ в пространстве $\mathscr{D}'_+$. Переходя в (1.8.17) к пределу при $j \to \infty$, находим, что

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset \overline{\bigcup_{\xi \in \operatorname{supp} f} N^{(\xi', \xi_n)}_{(x, y)}(\operatorname{supp} g)^\varepsilon}. \tag{1.8.18}$$

Так как $\varepsilon$ можно выбрать сколь угодно малым, то из (1.8.18) следует справедливость вложения (1.8.7) в случае $f \in \mathscr{D}'_+$, $g \in \Phi'_+$. Аналогично рассматривается случай $f \in \Phi'_+$, $g \in \mathscr{D}'_+$. Теорема доказана.

Изучим теперь связь между преобразованием Фурье — Бесселя и обобщенной сверткой. Имеет место

Теорема 1.8.4. *Если $f \in \mathscr{D}'_+$, $g \in \Phi'_+$, то*

$$F_\nu[f*g] = F_\nu[g] \cdot F_\nu[f]. \tag{1.8.19}$$

Доказательство. Заметим, что правая часть равенства (1.8.19) имеет смысл, так как согласно следствию (1.6.3) функция $F_\nu[g]$ является мультипликатором в $Z_+$.

Используя определение преобразования Фурье — Бесселя и обобщенной свертки, имеем

$$(F_\nu[f*g](s,\ \tau),\ \psi(s,\ \tau)) = C_{\nu,n}^{-1}((f*g)(x,y),\ \varphi(x,y)) =$$
$$= C_{\nu,n}^{-1}(f(\xi',\ \xi_{n+1}),\ \eta_{g,\varphi}(\xi',\ \xi_{n+1})) =$$
$$= (F_\nu[f](s,\ \tau),\ F_\nu[\eta_{g,\varphi}](s,\ \tau)), \qquad (1.8.20)$$

где $\varphi = F_\nu^{-1}[\psi]$, $\psi \in Z_+$, $\eta_{g,\varphi}(\xi',\ \xi_{n+1}) = (g(x,y),\ T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi',\ y)) \in$ $\in C_{0,+}^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\xi = (\xi',\ \xi_{n+1})$. Далее,

$$F_\nu[\eta_{g,\varphi}(\xi',\xi_{n+1})](s,\ \tau) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(x,s)} j_\nu(\xi_{n+1}\tau)(g(x,y),\ T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi',\ y))\,|\xi_{n+1}|^k\,d\xi'\,d\xi_{n+1} =$$
$$= (g(x,y),\ \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(\xi',s)} j_\nu(\xi_{n+1}\tau)(g(x,y),\ T_y^{\xi_{n+1}}\varphi(x+\xi',\ y)) \times$$
$$\times |\xi_{n+1}|^k\,d\xi'\,d\xi_{n+1}) = (g(x,y),\ e^{-i(x,s)} j_\nu(y\tau)) \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(\xi',s)} j_\nu(\xi_{n+1}\tau)\,\varphi(\xi)\,|\xi_{n+1}|^k\,d\xi'\,d\xi_{n+1} = \overline{F_\nu[g](\bar{s},\ \bar{\tau})}\,\psi(s,\ \tau).$$

Здесь мы воспользовались свойством самосопряженности оператора обобщенного сдвига, известной формулой (см. § 1.3)

$$T_y^{\xi_{n+1}} j_\nu(\xi_{n+1}\tau) = j_\nu(y\tau)\,j_\nu(\xi_{n+1}\tau),$$

формулами (1.5.5), (1.6.5) (см. также доказательство теоремы 1.8.1).

Из (1.8.20) и (1.8.21) следует формула (1.8.19)..

## § 1.9. Теорема Пэли — Винера — Шварца для преобразования Фурье — Бесселя

В настоящем параграфе доказывается аналог теоремы Пэли — Винера — Шварца для преобразования Фурье — Бесселя (см. [101]) распределений $f \in \Phi'_+$.

Теорема 1.9.1. 1) *Целая аналитическая функция $U(s,\ \tau)$, $s = (s_1,\ \ldots,\ s_n)$, четная по переменной $\tau$, является преобразованием Фурье — Бесселя функции $f \in C_{0,+}^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$, сосредоточенной на множестве $G_{c,a} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon |x_1| \leqslant a_1,\ \ldots,\ |x_n| \leqslant a_n;\ |y| \leqslant a_{n+1}\}$, $a = (a_1,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1})$, тогда и только тогда, когда для любого $m = 0, 1, \ldots$ найдется постоянная $C_m$ такая, что*

$$|U(s,\ \tau)| \leqslant C_m(1+|s|^2+|\tau|^2)^{-m} \times$$
$$\times \exp\left[\sum_{j=1}^{n} a_j|\operatorname{Im} s_j| + a_{n+1}|\operatorname{Im}\tau|\right], \qquad (s,\ \tau) \in \mathbb{C}^{n+1}. \qquad (1.9.1)$$

2) *Целая аналитическая функция $U(s,\ \tau)$, четная по переменной $\tau$, является преобразованием Фурье — Бесселя финитного распределения $f \in \Phi'_+$, сосредоточенного на множестве $G_{c,a}$, тогда и только тогда,*

*когда для некоторых постоянных* $C, N \geqslant 0$

$$|U(s, \tau)| \leqslant C(1+|s|+|\tau|)^N \times$$
$$\times \exp\left[\sum_{j=1}^{n} a_j |\operatorname{Im} s_j| + a_{n+1} |\operatorname{Im} \tau|\right], \qquad (s, \tau) \in \mathbb{C}^{n+1}. \quad (1.9.2)$$

Доказательство. Первая часть теоремы, а также необходимость условия (1.9.2) доказаны нами в § 1.5 и 1.6 (теорема 1.5.1, лемма 1.6.1).

Для доказательства достаточности (1.9.2) заметим, что $U \in Z'_+$ и, следовательно, $U = F_\nu[f]$ для некоторого $f \in \mathscr{D}'_+$. Покажем, что $f \in \Phi'_+$, причем $\operatorname{supp} f \subset G_{c,a}$.

Пусть $f_\varepsilon = f * \omega_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, где $\omega_\varepsilon$ — функция, введенная при доказательстве теоремы 1.8.3. В силу теоремы 1.8.4

$$F_\nu[f_\varepsilon] = F_\nu[\omega_\varepsilon] F_\nu[f].$$

Отсюда и из первой части данной теоремы следует, что $F_\nu[f_\varepsilon](s, \tau)$ является целой аналитической функцией, четной по переменной и удовлетворяющей неравенству вида (1.9.1), в котором каждое из чисел $a_j$, $j = 1, \ldots, n$, $n+1$, заменено на $a_j + \varepsilon$. Поэтому

$$\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon |x_1| \leqslant a_1 + \varepsilon, \ldots, |y| \leqslant a_{n+1} + \varepsilon\}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что $\operatorname{supp} f \subset G_{c,a}$. Теорема доказана.

## § 1.10. Свойства симметрии преобразования Фурье — Бесселя

Пусть $\mathbb{R}^n_{(+)} = (\mathbb{R}^1_+)^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\colon x_k \in \mathbb{R}^1_+,\ k = 1, \ldots, n\}$. Положим $x' = x/|x|$, $x'_k = x_k/|x|$. Рассмотрим множество $\mathscr{P}_k = \mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n_{(+)})$ однородных полиномов степени $2k$, четных по каждой переменной $x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Введем на $\mathscr{P}_k$ скалярное произведение. Рассмотрим линейную форму вида

$$\langle P, Q \rangle = P(B) Q(x), \quad (1.10.1)$$

где

$$P,\ Q \in \mathscr{P}_k, \quad B = \{B_1, \ldots, B_n\}, \quad B_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\nu_j}{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$j = 1, \ldots, n; \quad \nu = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}, \quad \nu_j \geqslant 0, \quad |\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n.$$

Здесь

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^{2\alpha} \equiv \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x_1^{2\alpha_1} \ldots x_n^{2\alpha_n},$$
$$Q(x) = \sum_{|\beta|=k} b_\beta x^{2\beta} \equiv \sum_{|\beta|=k} b_\beta x_1^{2\beta_1} \ldots x_n^{2\beta_n}, \quad (1.10.2)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — целочисленные мультииндексы, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$; дифференциальный оператор $P(B)$ порожден полиномом $P(x)$ по следующему правилу:

$$P(B) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha B^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha B_1^{\alpha_1} \ldots B_n^{\alpha_n}. \quad (1.10.3)$$

Покажем, что форма (1.10.1) на самом деле является скалярным произведением. Для этого достаточно показать, что $\langle P, P\rangle \geqslant 0$ и $\langle P, P\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $P=0$. Пусть $|\alpha|=|\beta|$. Если $\alpha\neq\beta$, то

$$B^{\alpha}x^{2\beta}=\left(B_1^{\alpha_1}x_1^{2\beta_1}\right)\dots\left(B_n^{\alpha_n}x_n^{2\beta_n}\right)=0,$$

если же $\alpha=\beta$, то

$$B^{\alpha}x^{2\alpha}=\frac{4^{|\alpha|}\alpha!\Gamma_n\left(\alpha+\dfrac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma_n\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)},$$

где

$$\alpha!=\alpha_1!\dots\alpha_n!,\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n,$$

$$\Gamma_{(n)}(\mu)=\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\mu_j),\qquad \mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Следовательно, $\langle P, P\rangle=0$ только при $P=0$.

Определение 1.10.1. *Полином $P\in\mathscr{P}_k$ назовем B-гармоническим, если*

$$\Delta_{(B)}P(x)\equiv\sum_{j=1}^{n}B_jP(x)=0. \tag{1.10.4}$$

Теорема 1.10.1. *Пусть $P\in\mathscr{P}_k$; тогда справедливо равенство*

$$P(x)=P_k(x)+|x|^2P_{k-1}(x)+\dots+|x|^{2k}P_0(x), \tag{1.10.5}$$

*где $P_j\in\mathscr{P}_j$, $j=0, 1, \dots, k$,— однородные B-гармонические полиномы степени $2j$.*

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\Delta_B$: $\mathscr{P}_k\to\mathscr{P}_{k-1}$. Сначала покажем, что $\Delta_{(B)}$ является эпиморфизмом $\mathscr{P}_k\overset{\text{на}}{\to}\mathscr{P}_{k-1}$, т. е. $R(\Delta_{(B)})=\mathscr{P}_{k-1}$. Если это не имеет места, то найдется ненулевой $Q\in\mathscr{P}_{k-1}$, ортогональный к $R(\Delta_{(B)})$, т. е.

$$\langle\Delta_{(B)}P, Q\rangle=\langle Q, \Delta_{(B)}P\rangle=0,\quad \forall P\in\mathscr{P}_k.$$

В частности, это верно при $P(x)=|x|^2Q(x)$. Тогда имеем

$$0=\langle Q, \Delta_{(B)}P\rangle=Q(B)\Delta_{(B)}P(x)=\Delta_{(B)}Q(B)P(x)=\langle P, P\rangle.$$

Последнее невозможно, поскольку $P\neq0$.

Пусть $\mathscr{A}_j$, $j\geqslant1$,— класс всех $B$-гармонических полиномов из $\mathscr{P}_j$. Тогда $\mathscr{P}_j=\mathscr{A}_j+\mathscr{B}_j$, где $\mathscr{B}_j=|x|^2\mathscr{P}_{j-1}$. Действительно, если $R(x)=|x|^2Q(x)$, где $Q\in\mathscr{P}_{j-1}$, то $\langle R, P\rangle=0$ тогда и только тогда, когда $Q(B)\Delta_{(B)}P(x)=0$ для всех $Q\in\mathscr{P}_{j-1}$, а это верно только при $\Delta_{(B)}P(x)=0$. В частности, при $j=k$ имеем

$$P(x)=P_k(x)+|x|^2Q(x), \tag{1.10.6}$$

где

$$P\in\mathscr{P}_k,\quad P_k\in\mathscr{A}_k,\quad Q\in\mathscr{P}_{k-1},$$

откуда с помощью индукции получаем (1.10.5).

Положим $\Sigma_+^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n_{(+)}\colon |x|=1,\ x_k\geqslant0,\ k=1,\dots,n\}$.

Следствие 1.10.1. *Сужение на $\Sigma_+^{n-1}$ любого полинома $n$ переменных (четного по каждой из переменных) есть сумма сужений $B$-гармонических полиномов на $\Sigma_+^{n-1}$.*

Определение 1.10.2. *Назовем пространство $\mathscr{H}_k$ сужений на $\Sigma_+^{n+1}$ $B$-гармонических полиномов степени $2k$:*

$$\mathscr{H}_k=\{Y(x')=P(x/|x|):\ P\in\mathscr{A}_k\} \tag{1.10.7}$$

*пространством $B$-сферических гармоник.*

В силу однородности

$$P(x)=|x|^{2k}Y(x')=|x|^{2k}Y(x/|x|) \qquad (x\neq 0). \tag{1.10.8}$$

*Будем называть $\mathscr{A}_k$ множеством пространственных $B$-сферических гармоник.*

Найдем размерность $\mathscr{H}_k$. Имеем

$$\dim\mathscr{P}_k=d_k=\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\ k!}. \tag{1.10.9}$$

Отсюда и из формулы (1.10.6) следует, что

$$\dim\mathscr{A}_k=d_k-d_{k-1}=\binom{n+k-1}{k}-\binom{n+k-2}{k-1} \text{ при } k\geqslant 1. \tag{1.10.10}$$

Кроме того, $\dim\mathscr{A}_0=1$. В частности, отсюда следует, что при $n=2$ $\dim\mathscr{A}_k=1$. В силу (1.10.8) отображение сужения $P\to Y$ имеет тривиальное ядро и, следовательно, является изоморфизмом $\mathscr{A}_k$ и на $\mathscr{H}_k$, откуда согласно (1.10.10) получаем

$$\dim\mathscr{H}_k=\binom{n+k-1}{k}-\binom{n+k-2}{k-1},\quad k\geqslant 1,\quad \dim\mathscr{H}_0=1.$$

Введем в рассмотрение ряд весовых функциональных пространств. Обозначим через $L_{p,\nu,+}=L_{p,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$, $1\leqslant p<\infty$, множество измеримых на $\mathbb{R}^n_{(+)}$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\nu,+}=\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{(+)}}|f(x)|^p\,d\Lambda(x)\Big)^{1/p}<\infty \tag{1.10.11}$$

и определено внешнее скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^n_{(+)}}f(x)\overline{g(x)}\,d\Lambda(x), \tag{1.10.12}$$

где

$$f\in L_{p,\nu,+},\quad g\in L_{q,\nu,+},\quad p^{-1}+q^{-1}=1,$$
$$d\Lambda(x)=x^\nu dx=x_1^{\nu_1}\dots x_n^{\nu_n}dx_1\dots dx_n.$$

Через $L_{2,\nu,+}(\Sigma_+^{n-1})$ обозначим множество измеримых на $\Sigma_+^{n-1}$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_\Sigma=\Big(\int\limits_{\Sigma^{n-1}_{(+)}}|f(x')|^2\,d\Sigma(x')\Big)^{1/2}<\infty$$

с соответствующим скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} f(x')\overline{g(x')}\,d\Sigma(x'), \qquad (1.10.13)$$

где $f, g \in L_{2,\nu,+}(\Sigma_+^{n-1})$, $d\Sigma(x') = (x')^\nu dS(x')$, $dS$ — элемент поверхности $\Sigma_+^{n-1}$.

Следствие 1.10.2. *Множество всех конечных линейных комбинаций элементов* $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathscr{H}_k$

1) *плотно в* $C(\Sigma_+^{n-1})$ *по* $L_\infty$*-норме,*

2) *плотно в* $L_{2,\nu,+}(\Sigma_+^{n-1})$.

Доказательство проводится по стандартной схеме.

Следствие 1.10.3. *Пусть* $Y^{(k)} \in \mathscr{H}_k$, $Y^{(l)} \in \mathscr{H}_l$ — *сферические гармоники степеней* $2k$ *и* $2l$ *соответственно, причем* $k \neq l$. *Тогда*

$$\langle Y^{(k)};\; Y^{(l)}\rangle = \int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} Y^{(k)}(x')\,Y^{(l)}(x')\,d\Sigma(x') = 0. \qquad (1.10.14)$$

Доказательство. Для $x \in \mathbb{R}^n_{(+)}$ положим $r = |x|$, $x' = x/r$. Определим $u(x) = r^{2k} Y^{(k)}(x')$, $v(x) = r^{2l} Y^{(l)}(x')$. Имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\Sigma_+^{n-1}} = \left.\left(\frac{\partial r^{2k}}{\partial r}\right)\right|_{r=1} \cdot Y^{(k)}(x') = 2k\,Y^{(k)}(x'),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right|_{\Sigma_+^{n-1}} = \left.\left(\frac{\partial r^{2l}}{\partial r}\right)\right|_{r=1} Y^{(l)}(x') = 2l\,Y^{(l)}(x'),$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к $\Sigma_+^{n-1}$. По формуле Грина имеем

$$0 = \int\limits_{|x| \leqslant 1} (u\Delta_{(B)}v - v\Delta_{(B)}u)\,d\Lambda(x) = \int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) d\Sigma(x') =$$

$$= 2^{k+1}(l-k) \int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} Y^{(k)}(x')\,Y^{(l)}(x')\,d\Sigma(x').$$

Остальные граничные интегралы в силу четности функций $u$ и $v$ обращаются в нуль. Поскольку $k \neq l$, то выполняется (1.10.14).

Будем рассматривать $\mathscr{H}_k$ как подпространство пространства $L_{2,\nu,+}(\Sigma_+^{n-1})$ со скалярным произведением (1.10.13).

Пусть $\{Y_1^{(k)};\; \ldots;\; Y_{\alpha_k}^{(k)}\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}_k$, тогда в силу следствия 1.10.3 множество $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathscr{H}_k$ будет обладать ортонормированным базисом в $L_{2,\nu,+}(\Sigma_+^{n-1})$. Действительно, если $L_{2,\nu,+}(\Sigma_+^{n-1}) \ni f \neq 0$ ортогональна ко всем элементам этого множества, то для любого $h \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathscr{H}_k$ справедливо неравенство

$$\| f-h \|_\Sigma^2 = \| f \|_\Sigma^2 - \langle f, h\rangle_\Sigma - \langle h, f\rangle_\Sigma + \| h \|_\Sigma^2 = \| f \|_\Sigma^2 + \| h \|_\Sigma^2 \geqslant \| f \|_\Sigma^2 > 0.$$

Последнее невозможно в силу следствия 1.10.2. Таким образом, если $f \in L_{2,+,\nu}$, то существует единственное разложение

$$f=\sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}, \tag{1.10.15}$$

где ряд справа сходится к $f$ по норме $L_{2,\nu,+}(\Sigma_+^{n-1})$ и $Y^{(k)} \in \mathscr{H}_k$, причем $Y^{(k)}=b_1^{(k)} Y_1^{(k)}+\ldots+b_{\alpha_k}^{(k)}$ и $Y_{\alpha_k}$,

$$b_j^{(k)}=\langle f;\, Y_j^{(k)}\rangle_\Sigma, \quad j=1, \ldots, \alpha_k.$$

Следуя [166], определим гармонические подпространства $\mathscr{F}_k \subset L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}_{(+)}^n)$, $k=0, 1, \ldots$, как множество всех конечных линейных комбинаций элементов вида $P(x)f(x)$, где $P \in \mathscr{A}_k$, $f(x)=f_0(|x|)$ — некоторые радиальные функции, такие, что $P(x)f(x) \in L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}_{(+)}^n)$. Справедливо следующее утверждение (см. [37], [38]).

Лемма 1.10.1. *Разложение*

$$L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}_+^n)=\sum_{k=0}^{\infty} \oplus \mathscr{F}_k \tag{1.10.16}$$

*имеет место в том смысле, что:*

1) *каждое подпространство $\mathscr{F}_k$ замкнуто,*

2) *подпространства $\mathscr{F}_k$ попарно ортогональны,*

3) *каждый элемент из $L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}_{(+)}^n)$ есть предел конечных линейных комбинаций элементов из $\mathscr{H}_k$.*

Доказательство. Пространство $\mathscr{A}_k$, будучи изоморфно пространству $\mathscr{H}_k$, имеет конечную размерность $\alpha_k$. Пусть $P_1, \ldots, P_{\alpha_k}$ — ортонормированный базис в этом пространстве (со скалярным произведением, индуцированным $\mathscr{H}_k$). Тогда каждый элемент $f \in \mathscr{F}_k$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\alpha_k} P_j(x) f_j(|x|), \tag{1.10.17}$$

где $f_j$ — некоторые радиальные функции такие, что $P_j f_j \in L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}_{(+)}^n)$. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^2\, d\Lambda(x)=\sum_{j=1}^{\alpha_k} \int_0^{\infty} |f_j(r)|^2\, r^{|\nu|+n-1+4k} dr. \tag{1.10.18}$$

Из (1.10.18) следует утверждение 1). Попарная ортогональность пространств $\mathscr{F}_k$ следует непосредственно из ортогональности $B$-сферических гармоник на единичной сфере $\Sigma_+^{n-1}$ с помощью интегрирования в полярных координатах (см. следствие 1.10.3). Для доказательства свойства 3) достаточно показать, что если $f \in L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}_+^n)$ ортогональна ко всем $\mathscr{F}_k$, то она равна почти всюду нулю. В силу полноты $B$-сферических гармоник на $\Sigma_+^{n-1}$, такая функция должна обращаться в нуль почти всюду на каждой $\Sigma_{+,r}^{n-1}$, откуда следует утверждение 3).

Определим на пространстве $L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$ преобразование Фурье—Бесселя $F_B$: $L_{2,\nu,+} \overset{\text{на}}{\to} L_{2,\nu,+}$ формулой

$$(F_B f)(u) = \hat{f}(u) = C_\nu \int\limits_{\mathbb{R}^n_{(+)}} f(x) j(x, u)\, d\Lambda(x), \tag{1.10.19}$$

где

$$C_\nu = \left[2^{(|\nu|+n)/2}\Gamma\left(\frac{\nu_1+1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{\nu_n+1}{2}\right)\right]^{-1},$$

$$j(x, u) = j_{\mu_1}(x_1 u_1) \dots j_{\mu_n}(x_n u_n), \quad \mu_k = \frac{\nu_k - 1}{2}$$

$$(k = 1, \dots, n).$$

Поскольку интеграл (1.10.19) для $f \in L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$, вообще говоря, еще существует, определим сначала преобразование (1.10.19) (по всем переменным преобразование Бесселя (Ганкеля)) на плотном в $L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$ множестве $L_{1,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)}) \bigcap L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$; тогда $\hat{f}(u)$ будет принадлежать $L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$ и, кроме того, $\|\hat{f}\|_{2,\nu,+} = \|f\|_{2,\nu,+}$ (см., например, [63]). Следовательно, существует единственное ограниченное расширение $F_B$ этого оператора на все $L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$. Будем называть расширение $F_B$ преобразованием Фурье—Бесселя на $L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$ и использовать обозначение $\hat{f} = F_B f$ для всех $f \in L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$. В обшем случае, если $f \in L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$, то это определение дает $\hat{f}$ как $L_{2,\nu,+}$-предел последовательности $\{\hat{h}_k\}$, где $\{h_k\}$ — произвольная последовательность из $L_{2,\nu,+} \bigcap L_{1,\nu,+}$, сходящаяся к $f \in L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$ по норме $L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$. Удобно выбрать $\{h_k\}$ так, чтобы $h_k(x)$ равнялась $f(x)$ при $|x| \leqslant k$ и 0 при $|x| > k$. Тогда $\hat{f}$ есть $L_{2,\nu,+}$-предел последовательности $\hat{h}_k$, определенных равенством

$$\hat{h}_k(u) = C_{(\nu)} \int\limits_{|x| \le k} f(x) j(x, u)\, d\Lambda(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_{(+)}} h_k(x) j(x, u)\, d\Lambda(x).$$

Отметим также (см., например, [63]), что линейный ограниченный оператор $F_B$: $L_{2,\nu,+} \overset{\text{на}}{\to} L_{2,\nu,+}$ на самом деле является унитарным оператором.

Рассмотрим действие оператора $F_B$ на подпространствах $\mathscr{F}_k \in \in L_{2,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$. Докажем два простых, но важных утверждения.

Лемма 1.10.2. *Дифференциальный оператор* $\Delta_{(B)}$ (*определенный формулой* (1.10.4)) *может быть представлен в виде сумм радиальной и угловой части:*

$$\Delta_{(B)} = \Delta_{(B)}(r) + \Delta_{(B)}(\theta)/r^2, \tag{1.10.20}$$

*где*

$$\Delta_{(B)}(r) = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{|\nu| + n - 1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \tag{1.10.21}$$

$$\Delta_{(B)}(\theta)\, Y^{(k)}(\theta) = -\lambda_k Y^{(k)}(\theta); \tag{1.10.22}$$

*здесь*

$$r=|x|,\quad \theta=x/r,\quad Y^{(k)}\in\mathscr{H}_k,\quad \lambda_k=(2k)(2k+|\nu|+n-2).$$

Доказательство. Равенство (1.10.21) может быть получено непосредственным применением $\Delta_{(B)}$ к радиальной функции $f(|x|)\in \in C_+^2\overline{(\mathbb{R}^n_{(+)})}$. В самом деле, имеем:

$$\Delta_{(B)}f(|x|)=\Delta f(|x|)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_k}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}f(|x|)=$$
$$=\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\frac{(n-1)}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_k}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}=$$
$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{|\nu|+n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)f(r),\qquad x\neq 0,$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Так как

$$\Delta_{(B)}\left(Y^{(k)}(x')\right)=\Delta_{(B)}\left[r^{-2k}Y^{(k)}(x)\right]=$$
$$=\left[\Delta_{(B)}Y^{(k)}(x)\right]r^{-2k}+Y^{(k)}(x)\left[\Delta_{(B)}r^{-2k}\right]+2\langle\nabla Y^{(k)}(x),\nabla r^{-2k}\rangle=$$
$$=-(2k)(2k+|\nu|+n-2)\left[-Y^{(k)}(\theta)/r^2\right],\quad x\neq 0,\quad \theta=x'=x/r,$$

то выполняется (1.10.22). Здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

Лемма 1.10.3. *Преобразование Фурье — Бесселя* $F_B$ *изометрично отображает* $\mathscr{F}_0$ *на* $\mathscr{F}_0$, *причем если* $f\in\mathscr{F}_0\cap L_{1,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$, *то справедлива формула*

$$(F_Bf)(u)=\hat{f}_0(|u|)=C_{(\nu,0)}\int_0^\infty f_0(r)j_\mu(r|u|)r^{2\mu+1}dr, \tag{1.10.23}$$

*где* (см. [39])

$$f(x)=f_0(|x|)\in\mathscr{F}_0\cap L_{1,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)}),$$
$$\hat{f}_0(|u|)=\hat{f}(u)\in\mathscr{F}_0,\quad \mu=\frac{|\nu|+n-2}{2};$$
$$C_{(\nu,0)}=C_{(\nu)}|\omega_+^{n-1}|,$$
$$|\omega_{n-1}^+|=\int_{\Sigma_+^{n-1}}d\Sigma(x').$$

Доказательство. Пусть $f\in\mathscr{F}_0\cap L_{1,\nu,+}(\mathbb{R}^n_{(+)})$; рассмотрим интеграл

$$\hat{f}(u)=C_{(\nu)}\int_{\mathbb{R}^n_{(+)}}f_0(|x|)j(x,u)\,d\Lambda(x).$$

В силу теоремы Фубини можно перейти к повторному интегралу:

$$\hat{f}(u)=C_{(\nu)}\int_0^\infty f_0(r)r^{|\nu|+n-1}dr\int_{\Sigma_+^{n-1}}j(x,u)\,d\Sigma(x').$$

Интеграл $\int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} j(x, u)\, d\Sigma(x')$ для случая $n=2$ может быть вычислен непосредственно (см., например, [154]). В этом случае интеграл будет равен:

$$2^{-1/2}\Gamma\left(\frac{\nu_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{\nu_1+\nu_2+1}{2}\right) j_{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}(|x||u|).$$

Отсюда с помощью индукции, рассматривая последовательно интегралы вида

$$\int\limits_0^\pi j_{\frac{\nu_1+\ldots+\nu_k+k-2}{2}}(\rho'\sigma')\, j_{\frac{\nu_{k-1}-1}{2}}(x_{k+1}u_{k+1})\,(\rho')^{\nu_1+\ldots+\nu_k+k-1} x_{k+1}^{\nu_{k+1}}\, d\varphi,$$

где $\sigma'=\sqrt{u_1^2+\ldots+u_k^2}$, $\varphi$ — полярный угол в системе координат $(\rho, \varphi)$, $\rho=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_k^2+x_{k+1}^2}$, $\rho'=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_k^2}=\rho\cos\varphi$; $x_{k+1}=\rho\sin\varphi$, получаем формулу для произвольного $n$:

$$\int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} j(x, u)\, d\Sigma(x')=|\omega_+^{n-1}|\, j_\mu(|x||u|), \qquad \mu=(|\nu|+n-2)/2. \qquad (1.10.24)$$

Равенство (1.10.23) следует из формулы (1.10.24). Доказательство сюръективности отображения $F_B$: $\mathscr{F}_0 \overset{\text{на}}{\longrightarrow} \mathscr{F}_0$ тривиально.

Заметим, что формула (1.10.23) является формулой одномерного преобразования Фурье — Бесселя (преобразования Ганкеля) плотного в $L_{2,|\nu|+n-1,+}(\mathbb{R}_+^1)$ множества $L_{1,|\nu|+n-1,+}(\mathbb{R}_+^1) \cap L_{2,|\nu|+n-1,+}(\mathbb{R}_+^1)$ и, следовательно, определяет единственное ограниченное расширение на все пространство $L_{2,|\nu|+n-1,+}(\mathbb{R}_+^1)$ (см. [63]), которое является унитарным отображением $L_{2,|\nu|+n+1,+}(\mathbb{R}_+^1)$ на себя. С помощью последних двух лемм устанавливается следующая

Теорема 1.10.2. *Преобразование Фурье — Бесселя $F_B$ является унитарным отображением $\mathscr{F}_k$ на $\mathscr{F}_k$ $(k=0, 1, \ldots)$, причем если $f \in \mathscr{F}_k \cap L_{1,\nu,+}(\mathbb{R}_{(+)}^n)$ и имеет вид $f(x)=Y^{(k)}(x) f_0(|x|)$, $Y^{(k)} \in \mathscr{A}_k$, то справедлива формула*

$$(F_{(B)}f)(u)=Y^{(k)}(u)\hat{f}_0(|u|), \qquad (1.10.25)$$

*где*

$$\hat{f}_0(|u|)=(-1)^k C_{(\nu,k)} \int\limits_0^\infty f_0(r)\, j_{\mu+2k}(r|u|)\, r^{2\mu+1+4k}\, dr, \qquad (1.10.26)$$

$$\mu=\frac{|\nu|+n-2}{2}, \quad C_{(\nu,k)}=C_{(\nu,0)}4^{-k}\Gamma(\mu+1)\Gamma^{-1}(\mu+1+2k).$$

Доказательство. Покажем справедливость формулы (1.10.25). Пусть функция $f(x)=Y^{(k)}(x) f_0(|x|) \in \mathscr{F}_k \cap L_{1,\nu,+}(\mathbb{R}_{(+)}^n)$, $f(\cdot) \in L_{2,|\nu|+n-1+4k}(\mathbb{R}_+^1) \cap L_{2,|\nu|+n-1+4k}(\mathbb{R}_+^1)$. Рассмотрим интеграл

$$F_B f=\hat{f}(u)=C_{(\nu)} \int\limits_{\mathbb{R}_{(+)}^n} f(x)\, j(x, u)\, d\Lambda(x).$$

В силу теоремы Фубини этот интеграл может быть сведен к повторному интегралу:

$$\hat{f}(u)=C_{(\nu)}\int\limits_0^\infty f_0(r)r^{2\mu+1}dr\int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} j(x, u)\,Y^{(k)}(x)d\Sigma(x'). \qquad (1.10.27)$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$I(u)=\int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} j(x, u)\,Y^{(k)}(x)\,d\Sigma(x').$$

Так как функция $j_{\mu_i}(x_i u_i)$ является собственной функцией оператора $B_i=\frac{\partial^2}{\partial u_i^2}+\frac{\nu_i}{u_i}\frac{\partial}{\partial u_i}$ с собственным числом $-x_i^2$ (см., например, [63]), то произведение $j(x, u)\,Y^{(k)}(x)$ может быть представлено в виде:

$$j(x, u)=(-1)^k\,Y^{(k)}(B_u)\,j(x, u)$$

и внутренний интеграл $I(u)$, в силу равенства (1.10.24), принимает следующий вид:

$$I(u)\equiv(-1)^k\int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} Y^{(k)}(B_u)\,j(x, u)\,d\Sigma(x')=$$
$$=(-1)^k\,Y^{(k)}(B_u)\int\limits_{\Sigma_+^{n-1}} j(x, u)\,d\Sigma(x')=$$
$$=(-1)^k\,|\omega_+^{n-1}|\,Y^{(k)}(B_u)\,j_{\frac{|\nu|+n-2}{2}}(|x||u|).$$

Докажем справедливость функционального тождества

$$Y^{(k)}(B_u)\,j_\mu(|x|\cdot|u|)=C_k\,Y^{(k)}(u)\,j_{\mu+2k}(|x||u|), \qquad (1.10.28)$$

где

$$\mu=\frac{|\nu|+n-2}{2}, \qquad C_k=\frac{4^{-k}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+2k)}.$$

Формальное дифференцирование приводит к равенству

$$Y^{(k)}(B_u)\,j_\mu(|u|)=P_0(u)\,j_{\mu+k}(|u|)+P_1(u)\,j_{\mu+k+1}(|u|)+\ldots$$
$$\ldots+P_{k-1}(u)\,j_{\mu+2k-1}(|u|)+C_k\,Y^{(k)}(u)\,j_{\mu+2k}(|u|)=$$
$$=g(u)+C_k\,Y^{(k)}(u)\,j_{\mu+2k}(|u|), \qquad (1.10.29)$$

где $P_j\in\mathscr{P}_j$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$.

Покажем, что $g(u)\equiv 0$. Для этого воспользуемся тем фактом, что $Y^{(k)}(B_u)\,j_\mu(|u|)$ является собственной функцией оператора $\Delta_{(B)}$ с собственным значением $\lambda=-1$. В самом деле, в силу формулы (1.10.21) и определяющего функцию $j_\mu(\cdot)$ уравнения (см., например, [63]), имеем

$$(\Delta_{(B)}+I)\,Y^{(k)}(B_u)\,j_\mu(|u|)=Y^{(k)}(B_u)(\Delta_{(B)}+I)\,j_\mu(|u|)=$$
$$=Y^{(k)}(B_u)(\Delta_{(B)}(\rho)+I)\,j_\mu(\rho)=Y^{(k)}(B_u)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2\mu+1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+1\right)j_\mu(\rho)=0,$$

где $\rho=|u|$.

Применяя к обеим частям (1.10.29) оператор $(\Delta_{(B)}+I)$, находим, что

$$0=(\Delta_{(B)}+I)\,Y^{(k)}(B_u)j_\mu(\rho)=$$
$$=(\Delta_{(B)}+I)g(u)+C_k(\Delta_{(B)}+I)\{Y^{(k)}(u)j_{\mu+2k}(\rho)\}, \quad (1.10.30)$$

где $\rho=|u|$.

Рассмотрим слагаемое $(\Delta_{(B)}+I)\{Y^{(k)}(u)j_\mu(\rho)\}$. Перепишем его в виде:

$$(\Delta_{(B)}+I)\{Y^{(k)}(u)j_{\mu+2k}(\rho)\}=j_{\mu+2k}(\rho)\times$$
$$\times(\Delta_{(B)}Y^{(k)}(u))+Y^{(k)}(u)(\Delta_{(B)}+I)j_{\mu+2k}(\rho)+$$
$$+2\langle\nabla Y^{(k)}(u),\ \nabla j_{\mu+2k}(\rho)\rangle, \quad (1.10.31)$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — означает скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$. Первое слагаемое в правой части (1.10.31) равно нулю, поскольку $Y^{(k)}\in\mathscr{A}_k$. В силу леммы 1.10.2 и дифференциальных тождеств для $j_\mu$ (см., например, [63]) второе слагаемое может быть преобразовано следующим образом:

$$(\Delta_{(B)}+I)j_{\mu+2k}(\rho)=\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2\mu+1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+1\right)j_{\mu+2k}(\rho)=$$
$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2\mu+1+4k}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+1\right)j_{\mu+2k}(\rho)-\frac{4k}{\rho}\frac{\partial j_{\mu+2k}(\rho)}{\partial\rho}=$$
$$=-\frac{4k}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}j_{\mu+2k}(\rho). \quad (1.10.32)$$

Наконец, третье слагаемое принимает следующий вид:

$$2\langle\nabla Y^{(k)}(u),\ \nabla j_{\mu+2k}(\rho)\rangle=2\langle\nabla Y^{(k)}(u),\ \frac{u}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}j_{\mu+2k}(\rho)\rangle=$$
$$=\frac{4k}{\rho}Y^{(k)}(u)\frac{\partial}{\partial\rho}j_{\mu+2k}(\rho). \quad (1.10.33)$$

Подставляя (1.10.32), (1.10.33) в (1.10.31), получаем, что

$$(\Delta_{(B)}+I)\{Y^{(k)}(u)j_{\mu+2k}(|u|)\}=0,$$

и, следовательно, (1.10.30) можно записать в виде

$$0=(\Delta_{(B)}+I)g(u)=\sum_{i=0}^{k-1}\{j_{\mu+k+i}(\rho)\Delta_B P_i(u)+$$
$$+P_i(u)(\Delta_{(B)}+I)j_{\mu+k+i}(\rho)+2\langle\nabla P_i(u),\ \nabla j_{\mu+k+1}(\rho)\rangle\}.$$

Аналогично формулам (1.10.32), (1.10.33) могут быть преобразованы слагаемые $P_i(\Delta_{(B)}+I)j_{\mu+k+i}$, $\langle\nabla P,\ \nabla j_{\mu+k+i}\rangle$. Окончательно имеем

равенство

$$0=\sum_{i=0}^{k-1}\{j_{\mu+k+i}(\rho)\Delta_{(B)}P_i(u)+\frac{i-k}{i+k-\mu}P_i(u)j_{\mu+k+l+1}(\rho)\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}\left(\Delta_{(B)}P_i(u)+\frac{i-k+1}{i+k+\mu+1}P_{i-1}(u)\right)j_{\mu+k+i}(\rho)+$$

$$+(\mu+2k-1)^{-1}P_{k-1}(u)j_{\mu+2k}(\rho),$$

которое возможно тогда и только тогда, когда полиномиальные коэффициенты $\left(\Delta_{(B)}P_l(u)+\frac{i-k+1}{i+k+\mu+1}P_{l-1}(u)\right)$, $i=1, \ldots, k-1$, и $P_{k-1}(u)$ равны нулю, что в свою очередь возможно, лишь когда $P_i(u)\equiv 0$. Таким образом, тождество (1.10.28) доказано.

Соответственно интеграл $I(u)$ принимает вид

$$I(u)=\int_{\Sigma_+^{n-1}}Y^{(k)}(x)j(x,u)d\Sigma(x')=$$

$$=(-1)^k\frac{C_{(\nu,k)}}{C_{(\nu,0)}}Y^{(k)}(u)j_{\frac{|\nu|+n-2}{2}+2k}(|x|\cdot|u|)|x|^{4k}.$$

Подставляя последнее равенство в (1.10.27), получаем требуемые соотношения (1.10.25) и (1.10.26). Унитарность отображения $F_B$: $\mathscr{F}_k\xrightarrow{\text{на}}\mathscr{F}_k$ доказывается так же, как и в лемме 1.10.3.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Одномерные преобразования Ганкеля вместе с приложениями к простейшим задачам математической физики (задаче Дирихле в цилиндрических координатах, задаче Коши для цилиндрических волн) содержатся в известной монографии А. Г. Земаняна [41, гл. V]. Там же обсуждаются некоторые одномерные классы основных функций и соответствующие им пространства распределений, связанные с преобразованием Ганкеля. Мы рассматриваем соответствующие пространства пробных (основных) функций и распределений в многомерном случае. Отправной точкой для нас послужила известная работа Я. И. Житомирского [36], посвященная задаче Коши для параболических уравнений с оператором Бесселя, в которой непосредственно введены одномерные пространства $S_+$ и сопряженные к ним $S'_+$. Изучено действие в них одномерного преобразования Бесселя. Подход и результаты, содержащиеся в § 1.1, указаны в работе И. А. Киприянова, А. А. Куликова [101].

Распределение $r^\lambda$ изучалось И. А. Киприяновым, В. И. Кононенко; см. [64], где имеется также разложение в ряд Тейлора и Лорана $r^\lambda$ и важная формула

$$\left.\frac{2r^\lambda}{a_0\Gamma\left(\frac{\lambda+\gamma}{2}\right)}\right|_{\lambda=-\gamma-2p}=(-1)^p\frac{\Delta_B^p\delta(x,y)}{2^p\gamma(\gamma+2)\ldots(\gamma+2p-2)},$$

где $a_0$ — соответствующая постоянная, $\gamma=n+k+1$. Одномерное преобразование Ганкеля (Бесселя) используется здесь и в дальнейшем в той же форме, в которой оно встречается у Б. М. Левитана [131]. Насколько эффективна эта форма преобразования Бесселя в приложениях, показано в исследовании Я. И. Житомирского [36]. Формулы (§ 1.4), связывающие сингулярные дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы с одномерным преоб-

разованием Ганкеля (Бесселя), принадлежат И. А. Киприянову [63]. Он показал, что эти формулы могут быть успешно применены при конструкции весовых функциональных пространств и при доказательстве соответствующих теорем вложения для этих пространств. Многомерное преобразование Фурье — Бесселя, когда по группе переменных применяется преобразование Фурье, а по одной переменной — преобразование Бесселя, применялось в различных вариантах И. А. Киприяновым [63] при построении различных функциональных пространств. Теорема Пэли — Винера для этого преобразования Фурье — Бесселя доказана И. А. Киприяновым, А. А. Куликовым [122]; там же содержится обобщенная свертка и свойства ее, а также доказательство теоремы Пэли — Винера — Шварца для указанного преобразования Фурье — Бесселя, которая была применена А. А. Куликовым [121], [122] при построении фундаментальных решений для общих дифференциальных операторов в частных производных, содержащих оператор Бесселя. Преобразование Фурье — Бесселя от распределения $r^{\lambda}$ найдено И. А. Киприяновым, В. И. Кононенко [64].

Преобразование Фурье — Бесселя, когда по одной переменной применяется преобразование Фурье, а по каждой из других — преобразование Бесселя, изучалось Ю. В. Засориным [37] (см. также Л. Н. Ляхов [143]) в связи с исследованием гипоэллиптических уравнений нечетного порядка, содержащих оператор Бесселя по нескольким переменным.

Другим обобщением основных результатов классического гармонического анализа является перенесение результатов § 1.9 уже на случаи пространств $S_+(\mathbb{R}^n_{(+)})$ и $S'_+(\mathbb{R}^n_{(+)})$. Сюда входят вопросы разложения указанных пространств на гармонические подпространства и вопросы действия многомерного преобразования Фурье — Бесселя на них. Эти результаты были получены Ю. В. Засориным [37], [38]. Почти все результаты имеют самостоятельный интерес и могут быть применены при изучении широкого круга задач, содержащих операторы Бесселя по нескольким переменным. Некоторые из этих результатов для случая одной особой переменной были получены Л. Н. Ляховым [142].

## ГЛАВА II

# ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В § 2.1 даются определения основных классических операторов преобразования Сонина $S_{\nu,0}^{-\nu-1/2}$ и Пуассона $\mathscr{P}_{\nu,0}^{\nu+1/2}$. Обсуждаются недостатки этих операторов с точки зрения приложений к сингулярным эллиптическим краевым задачам. Относительно билинейной формы

$$(f;g)_\nu=\int_0^{+\infty} f(y)g(y)y^{2\nu+1}dy$$

для этих операторов находятся формально сопряженные операторы $S_\nu^{\nu+1/2}$ и $\mathscr{P}_\nu^{-\nu-1/2}$. Вводятся также в рассмотрение операторы $S_\nu^{\nu-1/2}$ и $\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}$, где $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$, которые получают соответственно из операторов $S_\nu^{\nu+1/2}$ и $\mathscr{P}_\nu^{-\nu-1/2}$ перенесением операции дифференцирования из второго в первый. Приведенные здесь выкладки носят формальный характер. Они приведены, чтобы лучше была видна природа происхождения операторов $S_\nu^{\nu-1/2}$ и $\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}$.

В § 2.2 мы приступаем к строгому определению и изучению свойств этих операторов. Сначала вводятся в рассмотрение необходимые классы функций. Затем дается определение операторов $S_\nu^{\nu-1/2}$ и $\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}$ и доказывается, что они действительно являются операторами преобразования. Для построения операторов преобразования другого типа вводится лиувиллевский оператор $I^\mu$ при $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$ по формуле (2.2.5), для остальных значений комплексного параметра $\mu$ функция $I^\mu f$ определяется с помощью аналитического продолжения. Операторы преобразования $\mathscr{P}_\nu$ и $S_\nu$ определяются на соответствующем множестве функций по формулам

$$\mathscr{P}_\nu=\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}I^{\nu-1/2},\quad S_\nu=I^{1/2-\nu}S_\nu^{\nu-1/2}.$$

Доказывается, что они действительно являются операторами преобразования. Обсуждается действие этих операторов на поведение функций, к которым они применяются.

В конце параграфа приводятся операторы преобразования, при конструкции которых приводится другой класс дробных интегралов $I_e^\mu$, которые в ядре содержат еще экспоненту и являются дробными интегралами лиувиллевского типа. Заметим, что операторы $I_e^\mu$ и $I^\mu$ коммутируют между собой. В § 2.3 исследуется действие операторов $I_e^\mu$ в пространстве Соболева на полупрямой. Доказывается, что

оператор $I_e^\mu$ расширяется до ограниченного как оператор из $L_2 \xrightarrow{\text{на}} H^s$, и непрерывность его из одного $H^s$ в другое. Доказанное утверждение для операторов $I^\mu$ не имеет места. Более того, даже при $\mu>0$ оператор $I^\mu$ не ограничен в $L_2$. Это и послужило основной причиной использования в ряде ситуаций операторов вида $I_e^\mu$, а не $I^\mu$. В § 2.4 изучается связь операторов $\mathscr{P}_\nu$ и $S_\nu$ и операторов $S_{\nu,e}$, $\mathscr{P}_{\nu,e}$, $I_e^\mu$ с преобразованием Фурье и Ганкеля (Бесселя). Так, для оператора $\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}$ справедливо следующее представление:

$$\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu} f(y)=\frac{i}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+1)}\, y^{-\nu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_\nu^{(1)}(y\eta)\,\eta^\nu F\Pi f(\eta)\,d\eta,$$

где $f\in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{E_+^1})$, $H_\nu^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля первого рода, $\Pi$ — оператор продолжения, $F$ — преобразование Фурье. Из этой формулы при $\nu\geqslant 0$ выводятся следующие формулы:

$$\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu} f=F_\nu^{-1}(\eta^{-1}F_- f),\qquad f\in \overset{0}{C}{}_-^\infty(\overline{E}_+^1);$$

$$S_\nu^{\nu-1/2} f=F_-^{-1}(\eta F_\nu f),\qquad f\in \overset{0}{C}{}_+^\infty(\overline{E}_+^1);$$

где $F_\nu$, $F_\nu^{-1}$ — прямое и обратное преобразование Ганкеля; $F_-$, $F_-^{-1}$ — прямое и обратное синус-преобразование Фурье. По аналогии с последними формулами можно ввести целое семейство других операторов (см. конец этого параграфа). Из представления для $\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}$ получается важное следствие, которое используется (лемма 2.4.1) в теории следов.

В § 2.5 изучаются в одномерном случае отображения введенными ранее операторами преобразования известных функциональных пространств, а также строятся новые пространства $H_\nu^s(E_+^1)$. В дальнейшем (гл. III) даются обобщения этих пространств на многомерный случай. Здесь же, пользуясь одномерной спецификой, получаются точные константы, например, в оценках для весовых следов. Именно здесь вводятся весовые граничные значения.

В § 2.6 сначала приводятся для полноты изложения некоторые классические факты о разложимости функций в ряд по сферическим гармоникам. Затем доказывается одна теорема о разложении в указанный ряд функций из пространства Соболева $H^s$.

В § 2.7 вводятся многомерные операторы преобразования $\sigma_n$ и $\beta_n$ и обсуждаются их свойства, в частности, связь этих операторов между собой. В § 2.8 приводятся некоторые результаты о многомерных операторах преобразования, связанные с пространством $L_2$.

## § 2.1. Классические операторы преобразования

Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — некоторые линейные операторы. Операторы $\mathscr{P}$ и $S$ называются *операторами преобразования* для $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$, если имеют место формулы

$$\mathscr{A}_2=\mathscr{P}\mathscr{A}_1 S,\qquad \mathscr{A}_1=S\mathscr{A}_2\mathscr{P} \tag{2.1.1}$$

и операторы $S$, $\mathcal{P}$ — взаимно обратные. Данное определение (см., например, [138]) не является вполне строгим, поскольку не указаны области значений, участвующих в формулах (2.1.1) операторов. Описание областей определения и значения соответствующих операторов мы будем давать в каждом конкретном случае. Простейшим примером операторов преобразования может служить преобразование Фурье. В этом случае $\mathcal{P}$ и $S$ — соответственно прямое и обратное преобразование Фурье, $\mathcal{A}_2$ — оператор дифференцирования, $\mathcal{A}_1$ — оператор умножения на $i\xi$. В данном случае операторы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ имеют различную природу. Мы же в дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ будут дифференциальными операторами. В частности, мы рассмотрим в качестве $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ следующие операторы:

$$\mathcal{A}_1=\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \mathcal{A}_2=B_\nu\equiv\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{2\nu+1}{y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Оператор $B_\nu$, как уже отмечалось в гл. I, принято называть оператором Бесселя (см., например, [36], [131]) с комплексным параметром $\nu$. В этой ситуации известны (см. [36], [131]) следующие операторы преобразования:

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_{\nu,0}^{\nu+1/2}: f\mapsto\mathcal{P}_{\nu,0}^{\nu+1/2}f(y)=$$
$$=\frac{2\Gamma(\nu+1)y^{-2\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^y(y^2-t^2)^{\nu-1/2}f(t)\,dt, \qquad (2.1.2)$$

$$S=S_{\nu,0}^{-\nu-1/2}: f\mapsto S_{\nu,0}^{-\nu-1/2}f(y)=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y(y^2-t^2)^{-\nu-1/2}t^{2\nu+1}f(t)\,dt. \qquad (2.1.3)$$

Здесь, как и выше, через $\Gamma(\cdot)$ обозначается гамма-функция Эйлера. Функция $f(y)$ определена на полупрямой $\overline{E^1_+}=\{y\geqslant0\}$ и является гладкой, финитной, четной функцией. В тех случаях, когда интегралы в предыдущих формулах (2.1.2) и (2.1.3) расходятся, нужно перейти к регуляризации этих интегралов. Оператор $\mathcal{P}_{\nu,0}^{\nu+1/2}$ принято называть *оператором Пуассона*, а оператор $S_{\nu,0}^{-\nu-1/2}$ — *оператором Сонина*. Названия эти заимствованы из теории цилиндрических функций, где так называются дробные интегралы в формулах (2.1.2) и (2.1.3) при некоторой конкретной функции $f$. С точки зрения приложений к сингулярным эллиптическим краевым задачам в частных производных названные операторы обладают рядом недостатков. К этим недостаткам относятся следующие: во-первых, операторы $\mathcal{P}_{\nu,0}^{\nu+1/2}$ и $S_{\nu,0}^{-\nu-1/2}$ удовлетворяют соотношениям (2.1.1) лишь на множестве четных функций; во-вторых, они не сохраняют финитность и быстрое убывание на бесконечности; в-третьих, они изменяют гладкость преобразуемых функций. На этот факт впервые обращено внимание в работе [131]. В связи с вышеизложенным, прежде чем вводить новые операторы преобразования, свободные от указанных выше недостатков, найдем сначала для операторов (2.1.2) и (2.1.3)

формально сопряженные операторы относительно билинейной формы вида

$$(f;\, g)_\nu=\int\limits_0^\infty f(y)g(y)y^{2\nu+1}\,dy.$$

Имеем

$$(\mathscr{P}_{\nu,0}^{\nu+1/2}g, f)_\nu=\int\limits_0^{+\infty} t^{2\nu+1}f(t)\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}t^{-2\nu}\int\limits_0^t(t^2-y^2)^{\nu-1/2}g(y)\,dy\,dt=$$

$$=\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_0^{+\infty} g(y)\int\limits_y^{+\infty} tf(t)(t^2-y^2)^{\nu-1/2}dt\,dy=(g,\, S_\nu^{\nu+1/2}f)_{-1/2},$$

где оператор $S_\nu^{\nu+1/2}$ определяется по формуле

$$S_\nu^{\nu+1/2}f(y)=\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_y^{+\infty}(t^2-y^2)^{\nu-1/2}tf(t)\,dt. \qquad (2.1.4)$$

Аналогично предыдущему получаем

$$(S_{\nu,0}^{-\nu-1/2}g, f)_{-1/2}=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}\int\limits_0^{+\infty}dt\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t(t^2-y^2)^{-\nu-1/2}y^{2\nu+1}g(y)f(t)\,dy\right)=$$

$$=\frac{-\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}\int\limits_0^{+\infty}y^{2\nu+1}g(y)\,dy\int\limits_y^{+\infty}(t^2-y^2)^{-\nu-1/2}\times$$

$$\times\frac{df(t)}{dt}dt=(g,\, \mathscr{P}_\nu^{-\nu-1/2}f)_\nu,$$

где положено

$$\mathscr{P}_\nu^{-\nu-1/2}f(y)=\int\limits_y^{+\infty}(t^2-y^2)^{-\nu-1/2}\frac{df(t)}{dt}dt. \qquad (2.1.5)$$

Введем в рассмотрение другие операторы (см. [57]), которые получаются из операторов (2.1.4) и (2.1.5) перенесением оператора дифференцирования из второго в первый оператор:

$$S_\nu^{\nu-1/2}f(y)=\frac{-2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\frac{d}{dy}\int\limits_y^{+\infty}(t^2-y^2)^{\nu-1/2}tf(t)\,dt, \qquad (2.1.6)$$

$$\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}f(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}\int\limits_y^{+\infty}(t^2-y^2)^{-\nu-1/2}f(t)\,dt, \qquad (2.1.7)$$

где под $a^{\mu}$ понимается главная ветвь многозначной функции: $a^{\mu}=\exp(\mu \ln a)$, где $\ln a$ веществен при $a>0$. Хотя приведенные только что выкладки носили формальный характер, тем не менее они проясняют природу происхождения операторов (2.1.6) и (2.1.7).

## § 2.2. Конструкция операторов преобразования

Пусть $R$ обозначает положительное число или бесконечность. Через $C^{\infty}(0, R)$ обозначается множество бесконечно дифференцируемых функций на интервале $(0, R)$. Через $\overset{0}{C}{}^{\infty}(0, R)$ обозначается подмножество функций из $C^{\infty}(0, R)$, имеющих компактный носитель в $(0, R)$. Через $C^{\infty}[0, R)$ обозначаем множество функций из $C^{\infty}(0, R)$, все производные которых непрерывны вплоть до левого конца. Символ $\overset{0}{C}{}^{\infty}[0, R)$ обозначает множество функций из $C^{\infty}[0, R)$, обращающихся в нуль в окрестности правого конца. Через $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(0, R)$ обозначим подмножество функций из $C^{\infty}(0, R)$, обращающихся в нуль в окрестности правого конца. Заметим, что в окрестности точки $y=0$ функции из $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(0, R)$ могут расти произвольным образом. Функцию $f\in C^{\infty}[0, R)$ будем называть четной (нечетной), если $D^k f(0)=0$ при всех нечетных (четных) неотрицательных значениях $k$. Здесь $D=\dfrac{\partial}{\partial y}$, $D^k=DD^{k-1}$. Функция $f\in C^{\infty}[0, R)$ будет четной тогда и только тогда, когда функция $g(y)\equiv f(\sqrt{y})$ принадлежит $C^{\infty}[0, R^2)$. Этот факт нетрудно доказывается с помощью формулы Тейлора. Множество четных (нечетных) функций обозначается (см. гл. I) через $C^{\infty}_{+}[0, R)(C^{\infty}_{-}[0, R))$. Положим $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\pm}[0, R)=C^{\infty}_{\pm}[0, R)\cap\overset{0}{C}{}^{\infty}[0, R)$. Кроме того, используются обозначения $E^1_+=(0, \infty)$ и $\overline{E^1_+}=[0, \infty)$ из предыдущей главы.

Определение 2.2.1. *Оператор преобразования* $S_{\nu}^{\nu-1/2}$ *при* $\operatorname{Re}\nu>-1/2$ *на функциях* $f\in\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$ *определяем по формуле* (2.1.6). *Оператор преобразования* $\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}$ *на том же классе функций при* $0\leqslant\operatorname{Re}\nu<1/2$ *определяем по формуле* (2.1.7). *Для* $\operatorname{Re}\nu\geqslant 1/2$ *оператор* $\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}$ *определяется как аналитическое продолжение интеграла* (2.1.7) *по параметру* $\nu$.

Если $1/2\leqslant\operatorname{Re}\nu<N+1/2$, где $N$ — натуральное число, то оператор $\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}$ задается формулой

$$\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}f(y)=\frac{(-1)^N\sqrt{\pi}}{2N\Gamma(\nu+1)\Gamma(N-\nu+1/2)}\times$$

$$\times\int\limits_{y}^{+\infty}(t^2-y^2)^{N-\nu-1/2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{N-1}f(t)\,\frac{dt}{t}, \qquad (2.2.1)$$

в которой интеграл справа является сходящимся. Введенные операторы действительно являются операторами преобразования. В самом деле, имеет место

Теорема 2.2.1. *Операторы* $\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}$ *и* $S_{\nu}^{\nu-1/2}$ *при* $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$ *взаимно однозначно отображают* $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$ *на себя и являются взаимно обратными. Имеют место формулы*

$$B_\nu \mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}=\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}D^2,\quad D^2S_{\nu}^{\nu-1/2}=S_{\nu}^{\nu-1/2}B_\nu. \qquad (2.2.2)$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re}\nu<N+1/2$, где $N$ — натуральное число. После замены $t\to ty$ формула (2.2.1) принимает вид

$$\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}f(y)=\frac{(-1)^N 2^{-N}\sqrt{\pi}\,y^{2(N-\nu)}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(N-\nu+1/2)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{y\,\partial y}\right)^{N-1}\times$$

$$\times\int\limits_y^\infty y^{-1}(t^2-1)^{N-\nu-1/2}t^{-2\nu}f(ty)\,dt=\frac{(-1)^N 2^{-N}\sqrt{\pi}\,y^{2(N-\nu)}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(N-\nu+1/2)}\times \qquad (2.2.3)$$

$$\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{y\,\partial y}\right)^{N-1}\int\limits_y^\infty y^{2\nu-1}(t^2-y^2)^{N-\nu-1/2}\,t^{-2N}f(t)\,dt.$$

Заметим, что первое равенство, когда из формулы (2.2.1) получается соответствующее выражение в (2.2.3), связано с заменой переменных. При этом надо иметь в виду следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\varphi(ty)\right)=t^2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\tau}\varphi(\tau)\right)\Bigg|_{\tau=ty}.$$

Из (2.2.3) сразу следует, что функция $\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}f(y)$ бесконечно дифференцируема при $y>0$ и финитна, если $f\in\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$. Более того, точная верхняя грань носителя $f$ при этом не увеличивается. Таким образом, оператор $\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}$ отображает пространство $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$ на себя. Аналогичным образом это доказывается и для оператора $S_{\nu}^{\nu-1/2}$. Докажем, что $\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}=(S_{\nu}^{\nu-1/2})^{-1}$. По теореме Фубини при $-1/2<\operatorname{Re}\nu<N+1/2$ имеем

$$\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}S_{\nu}^{\nu-1/2}f(y)=\frac{(-1)^{N+1}2^{1-N}y^{2(N-1)}}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(N-\nu+1/2)}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{y\,\partial y}\right)^{N-1}\int\limits_y^\infty y^{2\nu-1}\tau^{1-2\nu}\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{2\nu+1}f(\tau)\right]\times$$

$$\times\int\limits_y^\tau (t^2-y^2)^{N-\nu-1/2}\,t^{-2N-1}(\tau^2-t^2)^{\nu-1/2}\,dt\,d\tau.$$

Во внутреннем интеграле произведем замену переменных по формуле $1/t^2=1/y^2+z(1/\tau^2-1/y^2)$. Тогда будем иметь

$$\int_y^\tau (t^2-y^2)^{N-\nu-1/2} t^{-2N-1}(\tau^2-t^2)^{\nu-1/2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}y^{2N-2\nu-1}\tau^{2\nu-1}(1/y^2-1/\tau^2)^N\int_0^1 z^{N-\nu-1/2}(1-z^2)^{\nu-1/2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}(\tau^2-y^2)^N y^{-2\nu-1}\tau^{2\nu-2N-1}\frac{\Gamma(N-\nu+1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(N+1)}.$$

Следовательно,

$$\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}S_\nu^{\nu-1/2}f(y)=\frac{(-1)^{N+1}y^{2(N-\nu)}}{2^N\Gamma(N+1)}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{y\partial y}\right)^{N-1}\int_y^\infty(\tau^2-y^2)^N\frac{\tau^{-2N}}{y^2}\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{2\nu+1}f(\tau)\right]d\tau.$$

Интегрируя один раз по частям в этом интеграле и затем дифференцируя по параметру, получим

$$\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}S_\nu^{\nu-1/2}f(y)=\frac{(-1)^N 2N y^{2(N-\nu)}}{2^N\Gamma(N+1)}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{y\partial y}\right)^{N-1}\int_y^{+\infty}(\tau^2-y^2)^{N-1}\tau^{2(\nu-N)}f(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{-N!\,y^{2(N-\nu)}}{\Gamma(N+1)}\frac{\partial}{\partial y}\int_y^{+\infty}\tau^{2(N-\nu)}f(\tau)\,d\tau=f(y).$$

Аналогичным образом устанавливается формула $S_\nu^{\nu-1/2}\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}f\equiv f$. Стало быть, операторы $\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}$ и $S_\nu^{\nu-1/2}$ осуществляют взаимно однозначное отображение пространства $\overset{0}{C}{}^\infty_{\{0\}}(E^1_+)$ на себя. Докажем формулы (2.2.2). Достаточно проверить одну из них, например, первую, поскольку другая есть ее следствие. Вследствие возможности применения принципа аналитического продолжения достаточно рассмотреть случай $\operatorname{Re}\nu<1/2$. Для $f\in\overset{0}{C}{}^\infty_{\{0\}}(E^1_+)$ из (2.2.3) получаем

$$B_\nu\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}f(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{2\nu+1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\int\limits_y^\infty (t^2-y^2)^{-\nu-1/2}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}\int\limits_1^\infty (t^2-1)^{-\nu-1/2}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{2\nu+1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y^{-2\nu}f(ty)\right)dt. \qquad (2.2.4)$$

Так как имеют место соотношения вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^2}+\frac{2\nu+1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y^{-2\nu}f(ty)\right)=y^{-2\nu}t^2\left.\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=ty}+(1-2\nu)y^{-2\nu-1}t\left.\frac{df(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=ty},$$

$$(1-2\nu)y^{-2\nu}\int\limits_1^\infty t(t^2-1)^{-\nu-1/2}\left.\frac{df(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=ty}dt=$$

$$=-y^{-2\nu-1}\int\limits_1^\infty\frac{d(t^2-1)^{1/2-\nu}}{dt}\cdot\left.\frac{df(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=ty}dt=$$

$$=-y^{2\nu}\int\limits_1^\infty (t^2-1)^{-\nu-1/2}\left.\left[(t^2-1)\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}\right]\right|_{\tau=ty}dt,$$

то правая часть формулы (2.2.4) приводится к виду

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}y^{-2\nu}\int\limits_1^\infty (t^2-1)^{-\nu-1/2}\left.\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=ty}dt.$$

Этим завершается доказательство формулы (2.2.2), а вместе с тем и теоремы в целом.

Перейдем теперь к построению операторов преобразования другого типа. Введем в рассмотрение лиувиллевский оператор $I^\mu$ при $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$, который на функциях $f\in \overset{0}{C}{}^\infty_{\{0\}}(E^1_+)$ определяется по формуле

$$I^\mu f(y)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_y^\infty (t-y)^{\mu-1}f(t)\,dt. \qquad (2.2.5)$$

Для остальных значений комплексного параметра $\mu$ функция $I^\mu f(y)$ определяется с помощью аналитического продолжения по параметру $\mu$. Если $\operatorname{Re}\mu>-M$, где $M$ — натуральное число или нуль, то из (2.2.5)

следует, что

$$I^{\mu}f(y)=\frac{1}{\Gamma(\mu+M)}\int\limits_{y}^{\infty}(t-y)^{M+\mu+1}\frac{d^{M}f(t)}{dt^{M}}dt. \tag{2.2.6}$$

Следовательно, оператор $I^{\mu}$ определен на $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$ при всех комплексных $\mu$. Оператор $I^{\mu}$ обладает следующими свойствами: во-первых, он взаимно однозначно отображает пространство $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$ на себя; во-вторых, справедливо групповое свойство

$$I^{\mu}I^{\nu}=I^{\nu}I^{\mu}=I^{\mu+\nu}. \tag{2.2.7}$$

Лиувиллевские операторы дробного интегрирования и дифференцирования подробно изучались в работе [136]. Определим операторы преобразования $\mathscr{P}_{\nu}$ и $S_{\nu}$ при $\operatorname{Re}\nu>0$ на функциях $f\in\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$ по формуле

$$\mathscr{P}_{\nu}=\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}I^{\nu-1/2},\quad S_{\nu}=I^{1/2-\nu}S_{\nu}^{\nu-1/2}. \tag{2.2.8}$$

Из перечисленных выше свойств лиувиллевских операторов и теоремы 2.2.1 следует

Теорема 2.2.2. *При* $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$ *операторы* $\mathscr{P}_{\nu}$ *и* $S_{\nu}$ *взаимно однозначно отображают пространство* $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$ *на себя и являются взаимно обратными. Для* $f\in\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$ *справедливы формулы*

$$B_{\nu}\mathscr{P}_{\nu}f=\mathscr{P}_{\nu}D^2f,\quad D^2S_{\nu}f=S_{\nu}B_{\nu}f. \tag{2.2.9}$$

В теореме 2.2.2 ограничение на $\nu$ можно ослабить. Дело в том, что $S_{\nu}^{\nu-1/2}$, рассматриваемый как операторнозначная функция, аналитичен при $\nu\neq-1,-2,\ldots$ Для теории операторов преобразования этот факт действительно представляет интерес, а для теории рассматриваемых краевых задач — нет, так как случай $\nu<0$ по формуле Дарбу — Вайнштейна преобразуется к $\nu>0$. Поэтому можно в дальнейшем ограничиться лишь случаем $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$. Таким образом, операторы $\mathscr{P}_{\nu}$ и $S_{\nu}$ действительно являются операторами преобразования. Названные операторы допускают следующее представление.

Пусть $f\in\overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$. Тогда при $0\leqslant\operatorname{Re}\nu<1/2$ из формулы (2.1.7) и (2.2.6) получаем

$$\mathscr{P}_{\nu}f(y)=\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}I^{\nu-1/2}f(y)=\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}I^{\nu+1/2}Df(y)=$$

$$=\frac{-\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_{y}^{\infty}(t^2-y^2)^{-\nu-1/2}\times$$

$$\times \int_t^{\infty} (\tau-t)^{\nu-1/2} Df(\tau)\, d\tau\, dt = \frac{-\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)\Gamma(\nu+1/2)} \times$$

$$\times \int_y^{\infty} Df(\tau) \int_y^{\tau} (t^2-\tau^2)^{-\nu-1/2} (\tau-t)^{\nu-1/2} dt\, d\tau.$$

Для вычисления внутреннего интеграла введем новую переменную по формуле $z=\dfrac{t-y}{\tau-y}$. Тогда

$$\int_y^{\tau} (t^2-\tau^2)^{-\nu-1/2} (\tau-t)^{\nu-1/2} dt =$$

$$=(2y)^{-\nu-1/2} \int_0^1 z^{-\nu-1/2}(1-z)^{\nu-1/2}\left(1-\frac{y-\tau}{2y}z\right)^{-\nu-1/2} dz =$$

$$=\frac{\Gamma(1/2-\nu)\Gamma(1/2+\nu)}{(2y)^{\nu+1/2}}\, {}_2F_1\left(\nu+1/2,\ 1/2-\nu,\ 1;\ \frac{y-\tau}{2\tau}\right),$$

где через ${}_2F_1(a, b, c; \zeta)$ обозначена гипергеометрическая функция Гаусса. Выше была использована формула Эйлера (см. [7, с. 72])

$$ {}_2F_1(a, b, c; \zeta) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-\zeta t)^{-a} dt. \qquad (2.2.10)$$

Функция Лежандра первого рода $P^0_\mu(\zeta)$ при $\mathrm{Re}\,\zeta>0$ может быть определена формулой (см. [7, с. 156])

$$P^0_\mu(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\cos t)^{\mu} dt. \qquad (2.2.11)$$

Отметим, что функция $P^0_\mu(\zeta)$ является аналитической функцией комплексного параметра $\mu$. Гипергеометрическая функция из формулы (2.2.10) выражается через функцию Лежандра по формуле (см. [7, с. 127])

$$ {}_2F_1\left(\nu+1/2,\ 1/2-\nu;\ 1;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\tau}{y}\right) = P^0_{\nu-1/2}\left(\frac{\tau}{y}\right).$$

Таким образом, для оператора $\mathscr{P}_\nu$ получено следующее представление:

$$\mathscr{P}_\nu f(y) = \frac{-\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)} y^{-\nu-1/2} \int_y^{\infty} \frac{\partial f(\tau)}{\partial\tau} P^0_{\nu-1/2}\left(\frac{\tau}{y}\right) d\tau. \qquad (2.2.11)$$

Эта формула доказана при дополнительном ограничении $0\leqslant \mathrm{Re}\,\nu<1/2$. Нетрудно видеть, что при фиксированной $f$ и фиксированном $y>0$ обе

части этого равенства суть аналитические функции параметра $\nu$ при $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$. Поэтому, в силу аналитического продолжения, формула (2.2.11) имеет место при всех $\nu$, $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$. Разумеется, что $f\in \overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E^1_+)$.

Рассмотрим присоединенную функцию Лежандра $P_\mu^{-1}(\zeta)$, определяемую по формуле

$$\frac{\partial}{\partial\xi}P_\mu^0(\zeta)=\frac{\mu(\mu+1)}{\sqrt{\zeta^2-1}}P_\mu^{-1}(\zeta),\qquad \zeta\geqslant 1.$$

Интегрируя по частям в (2.2.11), получаем

$$\mathscr{P}_\nu f(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1/2)}y^{-\nu-1/2}\left[f(y)+(\nu^2-1/4)\right]\times$$

$$\times\int\limits_1^\infty f(ty)\frac{P_{\nu-1/2}^{-1}(t)}{\sqrt{t^2-1}}dt. \qquad (2.2.12)$$

Из формулы (2.2.12) следует, что оператор $\mathscr{P}_\nu$ не изменяет гладкость преобразуемой функции, поскольку ядро интегрального оператора (2.2.12) не имеет особенностей. Это утверждение справедливо лишь при $y>0$. Что же касается $y=0$, особенность функции $\mathscr{P}_\nu f$ может возникать в том случае, когда сама функция $f$ таковой не имела. Например, $\mathscr{P}_{1/2}f(y)\equiv y^{-1}f(y)$. Найдем аналогичное представление и для оператора $S_\nu$. При $0\leqslant\operatorname{Re}\nu<1/2$ и $f\in \overset{0}{C}{}^{\infty}(E^1_+)$ из формул (2.2.5) и (2.2.8) имеем

$$S_\nu f(y)=I^{1/2-\nu}S_\nu^{\nu-1/2}f(y)=\frac{-2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2+\nu)\Gamma(1/2-\nu)}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^\infty(t-y)^{-\nu-1/2}\int\limits_t^\infty(\tau^2-t^2)^{\nu-1/2}\tau f(\tau)\,d\tau\,dt=$$

$$=\frac{-2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2+\nu)\Gamma(1/2-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^\infty\tau f(\tau)\int\limits_y^\tau(t-y)^{-\nu-1/2}\times$$

$$\times(\tau^2-t^2)^{\nu-1/2}dt\,d\tau. \qquad (2.2.13)$$

Для вычисления внутреннего интеграла произведем замену переменных по формуле $z=\dfrac{t-y}{\tau-y}$. Тогда имеем

$$\int\limits_y^\tau(t-y)^{-\nu-1/2}(\tau^2-t^2)^{\nu-1/2}dt=$$

$$=(\tau+y)^{\nu-1/2}\int_0^1 z^{-\nu-1/2}(1-z)^{\nu-1/2}\left(1-\frac{y-\tau}{y+\tau}z\right)^{\nu-1/2}dz=$$

$$=\frac{\Gamma(1/2-\nu)\,\Gamma(1/2+\nu)}{(\tau+y)^{\nu+1/2}}\,{}_2F_1\left(1/2-\nu,\ 1/2-\nu;\ 1;\ \frac{y-\tau}{y+\tau}\right).$$

Гипергеометрическая функция в последней формуле сводится к функции Лежандра по формуле ([25, с. 128])

$${}_2F_1\left(1/2-\nu;\ 1/2-\nu;\ 1;\ \frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)=2^{\nu-1/2}(\zeta+1)^{1/2-\nu}P^0_{\nu-1/2}(\zeta).$$

Учитывая последнюю формулу, из (2.2.13) находим

$$S_\nu f(y)=\frac{-2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial y}\int_y^\infty \tau^{\nu+1/2}f(\tau)\,P^0_{\nu+1/2}(y/\tau)\,d\tau. \qquad (2.2.14)$$

В силу принципа аналитического продолжения полученное представление для оператора $S_\nu$ справедливо при $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$. После дифференцирования интеграла по параметру получаем

$$S_\nu f(y)=\frac{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}\left[y^{\nu+1/2}f(y)-(\nu^2-1/4)\int_1^\infty t^{\nu+1/2}f(ty)\,\frac{P^{-1}_{\nu-1/2}(1/t)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\right].$$

Отсюда видно, что оператор $S_\nu$, так же как и оператор $\mathscr{P}_\nu$, не изменяет гладкости функций.

Кроме введенных выше операторов преобразования, мы будем использовать и некоторые другие операторы преобразования, при построении которых будет использован другой класс дробных интегралов.

Определим на функциях из $\overset{0}{C}{}^\infty_{\{0\}}(E^1_+)$ оператор $I^\mu_e$ при $\mu>0$ по формуле

$$I^\mu_e f(y)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_y^\infty (t-y)^{\mu-1}e^{y-t}f(t)\,dt, \qquad y>0. \qquad (2.2.15)$$

Некоторые результаты по теории этих операторов содержатся в [158]. Если $\operatorname{Re}\mu>-M$, $M$ — целое неотрицательное число, то полагаем

$$I^\mu_e f(y)=\frac{(-1)^\mu}{\Gamma(\mu+M)}e^y\int_y^\infty (t-y)^{\mu+M-1}\frac{d^M}{dt^M}\left(e^{-t}f(t)\right)dt. \qquad (2.2.16)$$

Обозначим через $\mathscr{E}$ оператор умножения на $e^y$, а через $\mathscr{E}^{-1}$ обратный к нему; тогда справедлива формула

$$I^\mu_e=\mathscr{E}I^\mu\mathscr{E}^{-1}, \qquad (2.2.17)$$

которая связывает операторы $I^\mu$ и $I_e^\mu$ при всех комплексных $\mu$. Отсюда и из свойств лиувиллевских операторов вытекает групповое свойство $I_e^\mu$:

$$I_e^\mu I_e^\nu = I_e^\nu I_e^\mu = I_e^{\mu+\nu}. \qquad (2.2.18)$$

Следовательно, любой оператор $I_e^\mu$ отображает пространство $\overset{0}{C}{}^\infty_{\{0\}}(E_+^1)$ на себя и обратный к нему будет $I_e^{-\mu}$. Операторы $I_e^\mu$ и $I^\nu$ коммутируют между собой. В частности, $I_e^\mu$ коммутирует с оператором дифференцирования.

Найдем явное выражение операторов вида $I^\nu I_e^\mu$. Пусть сначала $\operatorname{Re}\nu>0$ и $\operatorname{Re}\mu>0$. Тогда для $f\in \overset{0}{C}{}^\infty_{\{0\}}(E_+^1)$ имеем

$$I_e^\mu I^\nu f(y)=\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\int_y^\infty (t-y)^{\nu-1}\int_t^\infty (\tau-t)^\mu e^{t-\tau}\,(\tau)\,d\tau\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\int_y^\infty f(\tau)(\tau-y)^{\nu+\mu-1}\int_0^1 z^{\mu-1}(1-z)^{\nu-1}e^{(y-\tau)}\,dz\,d\tau. \qquad (2.2.19)$$

Последний внутренний интеграл выражается через одну из специальных функций, а именно через вырожденную гипергеометрическую функцию $\Phi(a, c, \zeta)$ (другое стандартное обозначение ${}_1F_1(a, c, \zeta)$). Функция $\Phi$ при $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0$ может быть определена по формуле

$$\Phi(a, c, \zeta)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-1}e^{\zeta z}\,dz. \qquad (2.2.20)$$

Приведем некоторые известные ее свойства (см. [7, гл. VI]). Функция $\frac{1}{\Gamma(c)}\Phi(a, c, \zeta)$ аналитически продолжается до целой функции параметров $a$ и $c$ и переменной $\zeta$. При этом в устранимых особых точках $c=-m=0,\ -1,\ -2, \ldots$ полагают

$$\Phi(a, c, \zeta)=a(a+1)(a+2)\ldots(a+m)\frac{\zeta^{m+1}}{(m+1)!}\Phi(a+m+1, m+2; \zeta). \qquad (2.2.21)$$

Имеют место следующие формулы:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}[\zeta^c\Phi(a, c+1, \zeta)]=C\zeta^{c-1}\Phi(a, c, \zeta), \qquad (2.2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\Phi(a, c, \zeta)=\frac{a}{c}\Phi(a+1, c-1, \zeta), \qquad (2.2.23)$$

$$\Phi(a, c, \zeta)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-\zeta)^a[1+O(|\zeta|^{-1})], \qquad (2.2.24)$$

$$\zeta\to-\infty.$$

Вернемся к формуле (2.2.19). Учитывая (2.2.20), находим

$$I_e^\mu I^\nu f(y)=\frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_y^\infty f(\tau)(\tau-y)^{\mu+\nu-1}\Phi(\mu,\ \mu+\nu;\ y-\tau)\,d\tau. \qquad (2.2.25)$$

Поскольку правая часть аналитична по $\mu$ и $\nu$ при $\operatorname{Re}(\nu+\mu)>0$, то эта формула имеет место при этом соотношении между параметрами. Воспользовавшись формулой (2.2.22) и интегрируя по частям, получаем

$$I_e^\mu I^\nu f(y)=\frac{e^{i\pi(\mu+\nu)}}{\Gamma(\mu+\nu+1)}\int_y^\infty f(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[(y-\tau)^{\mu+\nu}\times$$

$$\times\Phi(\mu,\ \mu+\nu-1,\ y-\tau)]\,d\tau=\frac{e^{i\pi(\mu+\nu+1)}}{\Gamma(\mu+\nu+1)}\times$$

$$\times\int_y^\infty\frac{\partial f(\tau)}{\partial\tau}(y-\tau)^{\mu+\nu}\Phi(\mu,\ \mu+\nu+1;\ y-\tau)\,d\tau. \qquad (2.2.26)$$

Продолжая этот процесс, мы приходим к формуле

$$I_e^\mu I^\nu f(y)=\frac{e^{i\pi(\mu+\nu+1)}}{\Gamma(\mu+\nu+m)}\times$$

$$\times\int_y^\infty\frac{\partial^m f(\tau)}{\partial\tau^m}(y-\tau)^{\mu+\nu+m-1}\Phi(\mu,\ \mu+\nu+m;\ y-\tau)\,d\tau, \qquad (2.2.27)$$

справедливой при любом натуральном $m$. Правая часть этой формулы является аналитической функцией при $\operatorname{Re}(\mu+\nu)>-m$. Следовательно, формула (2.2.27) верна при $\operatorname{Re}(\mu+\nu)>-m$. Отсюда в частном случае $\nu=1-\mu-m$ посредством интегрирования по частям с учетом (2.2.23) получаем

$$I_e^\mu I^{1-\mu-m}f(y)=I^{1-\mu-m}I_e^\mu f(y)=$$

$$=(-1)^m\sum_{k=0}^{m-1}\frac{d^k f(y)}{dy^k}\frac{\Gamma(\mu+k)}{k!\,\Gamma(\mu)}+$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}\Gamma(\mu+m)}{m!\,\Gamma(\mu)}\int_y^\infty f(\tau)\Phi(\mu+m,\ m+1,\ y-\tau)\,d\tau. \qquad (2.2.28)$$

Эта формула верна уже при всех комплексных $\mu$ и натуральном $m$. В частности, имеем

$$J_{\mu,e}=I_e^\mu I^{-\mu}f(y)=f(y)-\mu\int_y^\infty f(\tau)\Phi(\mu+1,\ 2,\ y-\tau)\,d\tau. \qquad (2.2.29)$$

Интегральный оператор в (2.2.29) рассматривался ранее в работе [158].

## § 2.3. Действие оператора преобразования $I_e^\mu$ в пространствах Соболева на полупрямой

Пространство Соболева на полупрямой обозначим через $H^s(E_+^1)$, $s \geqslant 0$. Это пространство определяем как замыкание множества $\overset{0}{C}{}^\infty(E_+^1)$ по норме

$$\|f\|^2_{H^s(E_+^1)} = \|I^{-s}f\|^2_{L_2(E_+^1)} + \|f\|^2_{L_2(E_+^1)}. \tag{2.3.1}$$

Пространства с этой нормой называют *лиувиллевскими классами*. Так как в теории краевых задач в дальнейшем используются лишь целые $s$, то мы ограничимся этим случаем.

Имеет место

Лемма 2.3.1. *Оператор $I_e^s$ при целом $s \geqslant 0$ расширяется до ограниченного оператора, изоморфно отображающего $L_2(E_+^1)$ на $H^s(E_+^1)$.*

Доказательство. Для функции $f \in \overset{0}{C}{}^\infty(E_+^1)$ из (2.2.29) по обобщенному неравенству Минковского (см. [151]) получаем

$$\|I^{-s}I^s f\|_{L_2(E_+^1)} \leqslant \|f\|_{L_2(E_+^1)} + s\left\|\int_0^\infty f(y+t)\Phi(s+1, 2, -t)\,dt\right\|_{L_2(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_2(E_+^1)} + s\int_0^\infty |\Phi(s+1, 2, -t)|\,\|f(\cdot+t)\|_{L_2(E_+^1)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_2(E_+^1)}\left[1 + s\int_0^\infty |\Phi(s+1, 2; -t)|\,dt\right] = C\|f\|_{L_2(E_+^1)},$$

поскольку при $s>0$ последний интеграл в связи с наличием асимптотической формулы (2.2.24) сходится. Применяя еще раз обобщенное неравенство Минковского, найдем

$$\|I_e^s f\|_{L_2(E_+^1)} \leqslant \frac{1}{\Gamma(s)}\left\|\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}f(y+t)\,dt\right\|_{L_2(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_2(E_+^1)}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt = \|f\|_{L_2(E_+^1)}. \tag{2.3.2}$$

Таким образом, доказана оценка $\|I_e^s f\|_{H^s(E_+^1)} \leqslant C\|f\|_{L_2(E_+^1)}$. Докажем противоположную оценку. Для функции $f \in \overset{0}{C}{}^\infty(E_+^1)$ по формуле Лейбница имеем

$$I_e^{-s}f = \mathscr{E}I^{-s}\mathscr{E}^{-1}f = (-1)^s\mathscr{E}D^s\mathscr{E}^{-1}f =$$

$$= (-1)^s\mathscr{E}D^s\mathscr{E}^{-1} = (-1)^s\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{m}D^{s-k}f. \tag{2.3.3}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|f\|_{L_2(E_+^1)}=\|I_e^{-s}I_e^sf\|_{L_2(E_+^1)}\leqslant C\|I_e^sf\|_{H^s(E_+^1)}, \qquad (2.3.4)$$

постоянная в которой не зависит от $f$. Лемма доказана.

Следствие 2.3.1. *Норма* $\|f\|_{H^s(E_+^1)}\equiv\|I_e^{-s}f\|_{L_2(E_+^1)}$ *на пространстве* $H^s(E_+^1)$ *при* $s\geqslant 0$ *эквивалентна норме* (2.3.1).

Лемма 2.3.2. *Пусть* $s$, $s'\geqslant 0$ *и* $\mu$ — *комплексное число. Тогда при* $s-s'+\operatorname{Re}\mu>0$ *оператор* $I_e^\mu$ *непрерывно отображает пространство* $H^s(E_+^1)$ *в* $H^{s'}(E_+^1)$. *Если* $\mu$ *вещественно, то это верно при* $s-s'+\mu=0$.

Доказательство. Используя норму $\|\tilde{\cdot}\|_{H^s}$ и групповое свойство оператора $I_e^\mu$, получим

$$\|I_e^\mu f\|_{H^{s'}(E_+^1)}=\|I_e^{-s'+\mu}f\|_{L_2(E_+^1)}=\|I_e^{s-s'+\mu}I_e^{-s}f\|_{L_2(E_+^1)}.$$

Осталось только заметить по аналогии с (2.3.2), что оператор $I_e^\nu$ отображает непрерывно $L_2(E_+^1)$ в себя при $\operatorname{Re}\nu>0$, а также при $\nu=0$. Лемма доказана.

Заметим, что доказанные выше утверждения для операторов $I^\mu$ уже не имеют места. Более того, даже при $\mu>0$ оператор $I^\mu$ не ограничен в пространстве $L_2(E_+^1)$. Это и послужило одной из причин использования в ряде ситуаций операторов вида $I_e^\mu$, а не $I^\mu$. Приведем еще один результат, важный для теории краевых задач.

Лемма 2.3.3. *Пусть функция* $a\in C^\infty(E_+^1)$ *и ограничена вместе со всеми производными. Тогда при* $s\geqslant 0$ *и любых комплексных* $\mu$ *оператор* $I_e^{-\mu}aI_e^\mu$ *непрерывно отображает* $H^s(E_+^1)$ *в себя. Справедлива оценка*

$$\|I_e^{-\mu}(aI_e^\mu f)\|_{H^s(E_+^1)}\leqslant C\|f\|_{H^s(E_+^1)}\max_{k\leqslant|[\operatorname{Re}\mu]|+[s]+2}\sup_{y>0}|D^ka(y)|, \qquad (2.3.5)$$

*где постоянная* $C>0$ *не зависит от* $f$ *и* $a$.

Доказательство. С помощью следствия 2.3.1 общий случай $s\geqslant 0$ сводится к $s=0$. Пусть сначала $\operatorname{Re}\mu\geqslant 0$. По определению оператора $I_e^\mu$, полагая $m=[\operatorname{Re}\mu]+1$, получаем для $f\in\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{E_+^1})$ следующую формулу:

$$I_e^{-\mu}(aI_e^\mu f)=\frac{(-1)^me^y}{\Gamma(m-\mu)\Gamma(\mu)}D_y^m\int_y^\infty(t-y)^{m-\mu+1}\times$$

$$\times a(t)\int_\tau^\infty(\tau-t)^{\mu-1}e^{-\tau}f(\tau)\,d\tau\,dt=\frac{(-1)^me^y}{\Gamma(m-\mu)\Gamma(\mu)}\times$$

$$\times D_y^m\int_y^\infty e^{-\tau}f(\tau)(\tau-y)^{m-1}\int_0^1z^{m-\mu-1}(1-z)^{\mu-1}a(y+z(\tau-y))\,dz\,d\tau.$$

Положим $a^{(k)}(t)=D^k a(t)$. Тогда

$$I_e^{-\mu}(aI_e^{\mu}f)=a(y)f(y)-\frac{e^y}{\Gamma(m-\mu)\Gamma(\mu)}\int\limits_y^{\infty}e^{-\tau}f(\tau)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(m-1)!}{k!}(y-\tau)^{k-1}\times$$
$$\times\int\limits_0^1 z^{m-\mu-1}(1-z)^{\mu-1}a^{(k)}(y+z(\tau-y))\,dz\,d\tau,$$

следовательно,

$$|I_e^{-\mu}(aI_e^{\mu}f)|\leqslant C\sum_{k=0}^{m}\sup_{t>0}|a^{(k)}(t)|\,I_e^k(|f|).$$

Применение леммы 2.3.1 завершает доказательство при $\operatorname{Re}\mu>0$. При $\operatorname{Re}\mu<0$ и $m=|[-\operatorname{Re}\mu]|+1$ имеем

$$I_e^{-\mu}(aI_e^{\mu}f)=\frac{(-1)^m e^y}{\Gamma(m+\mu)\Gamma(-\mu)}\int\limits_y^{\infty}(t-y)^{-\mu-1}a(t)\times$$
$$\times\int\limits_t^{\infty}(\tau-t)^{m+\mu-1}D^m[e^{-\tau}f(\tau)]\,d\tau\,dt=\frac{(-1)^m e^y}{\Gamma(m+\mu)\Gamma(-\mu)}\times$$
$$\times\int\limits_y^{\infty}D^m[e^{-\tau}f(\tau)](\tau-y)^{m-1}\int\limits_0^1 z^{-\mu-1}(1-z)^{m+\mu-1}a(y+z(\tau-y))\,dz\,d\tau.$$

После $m$-кратного интегрирования по частям мы приходим к оценке (2.3.5). Пусть, наконец, $\operatorname{Re}\mu=0$. Тогда

$$I_e^{-\mu}(aI_e^{\mu}f)=\frac{e^y}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\mu)}D_y\int\limits_y^{\infty}(\tau-y)^{-\mu}\int\limits_{\tau}^{\infty}(\tau-t)^{\mu}D[e^{-\tau}f(\tau)]\,d\tau\,dt=$$
$$=\frac{e^y}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\mu)}D_y\int\limits_y^{\infty}D_{\tau}[e^{-\tau}f(\tau)](\tau-y)\int\limits_0^1 z^{-\mu}(1-z)^{\mu}a(y+z(\tau-y))\,dz\,d\tau.$$

Остальные рассуждения аналогичны предыдущему.

Следствие 2.3.2. *В условиях леммы при* $\operatorname{Re}(\nu+\mu)>0$ *имеет место оценка*

$$\|I_e^{\nu}(aI_e^{\mu}f)\|_{H^s(E_+^1)}\leqslant C\|f\|_{H^s(E_+^1)}\times$$
$$\times\max_{k\leqslant 2+\min(|[\operatorname{Re}\nu]|,\,|[\operatorname{Re}\mu]|)+[s]}\ \sup_{t>0}|D^k a(t)|. \qquad (2.3.6)$$

Для доказательства достаточно применить формулу

$$I_e^{\nu}aI_e^{\mu}=I_e^{\nu+\mu}I_e^{-\mu}aI_e^{\mu}=I_e^{\mu}aI_e^{-\mu}I_e^{\nu+\mu}$$

и воспользоваться ограниченностью оператора $I_e^{\lambda}$ при $\operatorname{Re}\lambda>0$.

## § 2.4. Связь операторов преобразования с преобразованиями Фурье и Ганкеля (Бесселя)

Одномерные преобразования Фурье, как обычно, определяем по формулам

$$Ff(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\eta y}\,dy,$$

$$F^{-1}g(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)e^{i\eta y}\,d\eta.$$

Мы будем также использовать косинус- и синус-преобразования

$$F_+f(\eta)=\int_0^{\infty} f(y)\cos y\eta\,dy,\quad F_+^{-1}g(y)=\frac{2}{\pi}F_+g(y);$$

$$F_-f(\eta)=\int_0^{\infty} f(y)\sin y\eta\,dy,\quad F_-^{-1}g(y)=\frac{2}{\pi}F_-g(y).$$

Прямое и обратное преобразования Ганкеля (см. § 1.3) имеют вид

$$F_\nu f(\eta)=\int_0^{\infty} f(y)j_\nu(y\eta)\,y^{2\nu+1}\,dy, \tag{2.4.1}$$

$$F_\nu^{-1}g(y)=\frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\int_0^{\infty} g(\eta)j_\nu(y\eta)\,\eta^{2\nu+1}\,d\eta,$$

где параметр $\nu\geqslant -1/2$, $j_\nu(\cdot)$ — нормированная функция Бесселя (см. § 1.3, формула (1.3.4)).

Обозначим через $\Pi$ какой-либо оператор продолжения функций, действующий из $\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{E^1_+})$ в $\overset{0}{C}{}^\infty(E^1)$. Один из таких операторов построен в работе [159]. Впрочем, можно предложить и следующий оператор продолжения:

$$\Pi f(y)=\begin{cases} f(y), & \text{если } y\geqslant 0,\\ \chi(y)\int_0^{\infty} f(-\lambda y)\psi(\lambda)\,d\lambda, & \text{если } y<0,\end{cases}$$

где $\psi(\lambda)=\pi^{-1}\int_0^{\infty}\sin(x\sqrt{\lambda})\,\psi_1(x)\,dx$, $\psi_1=\operatorname{sh}(x)\,\psi(x)$, причем $\chi$ — произвольная функция из $\overset{0}{C}{}^\infty(E^1)$, равная единице в некоторой окрестности нуля. Введенная функция $\psi$ ограничена, быстро убывает на

бесконечности и $\int\limits_0^\infty \lambda^n \psi(\lambda)\,d\lambda=(-1)^n$. Отсюда почти сразу следует, что оператор П отображает пространство $\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{E^1_+})$ в $\overset{0}{C}{}^\infty(E^1)$.

Пусть сначала $0\leqslant \mathrm{Re}\,\nu<1/2$. Тогда из (2.1.7) для функции $f\in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{E^1_+})$ получаем

$$\mathscr{P}^{1/2-\nu}f(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}\,y^{-2\nu}\int\limits_1^\infty (t^2-1)^{-\nu-1/2}f(yt)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu)\Gamma(1/2-\nu)}\,y^{-2\nu}\int\limits_1^\infty (t^2-1)^{-\nu-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity\eta}F\Pi f(\eta)\,d\eta\,dt. \qquad (2.4.2)$$

Из ограничения на $\nu$ следует суммируемость подынтегральной функции. Тогда, применяя теорему Фубини, получаем

$$f(y)=\frac{y^{-2\nu}}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F\Pi f(\eta)\int\limits_1^\infty (t^2-1)^{-\nu-1/2}e^{ity\eta}\,d\eta.$$

Внутренний интеграл выражается через функцию Ганкеля первого рода $H_\nu^{(1)}$ (функция Бесселя третьего рода) по формуле (см. [8, с. 95])

$$\int\limits_1^\infty (t^2-1)^{-\nu-1/2}e^{ity\eta}\,d\eta=\frac{i\pi(y\eta)^\nu\,\Gamma(1/2-\nu)}{2^{\nu+1}}H_\nu^{(1)}(y\eta).$$

Подставляя эту формулу в предыдущую, имеем

$$\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}f(y)=\frac{iy^{-\nu}}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+1)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_\nu^{(1)}(y\eta)\,\eta^\nu F\Pi f(\eta)\,d\eta. \qquad (2.4.3)$$

Правая часть этой формулы есть аналитическая при $\mathrm{Re}\,\nu\geqslant 0$ функция. Поэтому формула (2.4.3) имеет место при $\mathrm{Re}\,\nu\geqslant 0$. Из способа доказательства видно, что значения интеграла справа в (2.4.3) при $y>0$ не зависят от выбора оператора продолжения. Этот факт может быть доказан и непосредственно, исходя из самой формулы (2.4.3) и используя соответствующий аналог теоремы Пэли — Винера для преобразования Фурье — Бесселя (см. гл. I). Сейчас мы приведем одно прямое следствие полученной формулы, которое будет использовано в дальнейшем.

Лемма 2.4.1. *Пусть* $f\in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{E^1_+})$. *Тогда при* $\mathrm{Re}\,\nu>0$ *справедлива формула*

$$\lim_{y\to+0} y^{2\nu}\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}f(y)=\frac{1}{2\nu}f(0), \qquad (2.4.4)$$

*а при* $\nu=0$ *имеет место следующая формула:*

$$\lim_{y\to+0}\frac{1}{\ln\frac{1}{y}}\mathscr{P}_0^{1/2}f(y)=f(0). \qquad (2.4.5)$$

Доказательство нетрудно получить из (см. [8]) следующих асимптотических формул для функций Ганкеля:

$$z^{\nu}H_{\nu}^{(1)}(z)=\frac{-i\Gamma(\nu)2^{\nu}}{\pi}+o(1),\quad \mathrm{Re}\,\nu>0,\quad z\to0,$$

$$H_0^{(1)}(z)=\pi^{-1}2i\ln z+O(1),\ z\to0,$$

а также из ограниченности функций $H_{\nu}^{(1)}(z)$ при $z\geqslant\varepsilon>0$.

Рассмотрим случай вещественного $\nu\geqslant0$. Пусть $f\in\overset{0}{C}{}_{-}^{\infty}(\overline{E_{+}^{1}})$. Отсюда следует, что ее продолжение по закону нечетности на всю прямую принадлежит пространству $\overset{0}{C}{}^{\infty}(E^1)$. Выбирая в этом случае в качестве оператора продолжения в (2.4.3) продолжение по закону нечетности, находим

$$\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}f(y)=\frac{y^{-\nu}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{\nu}^{(1)}(y\eta)\eta^{\nu}F_{-}f(\eta)\,d\eta=$$

$$=\frac{y^{-\nu}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\left\{\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}\right\}=\frac{y^{-\nu}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\int_{0}^{\infty}[H_{\nu}^{(1)}(y\eta)-$$

$$-e^{i\pi\nu}H_{\nu}^{(1)}(-y\eta)]\,\eta^{\nu}F_{-}f(\eta)\,d\eta.$$

Далее, поскольку (см. [8, с. 91])

$$e^{-i\pi\nu}H_{\nu}^{(1)}(z)=H_{\nu}^{(2)}(z),$$

и, кроме того, (см. [8, с. 12])

$$J_{\nu}(z)=\frac{H_{\nu}^{(1)}(z)+H_{\nu}^{(2)}(z)}{2},$$

то предыдущая формула принимает вид

$$\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}f(y)=\frac{1}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}y^{-\nu}\int_{0}^{\infty}J_{\nu}(y\eta)\,\eta^{\nu}F_{-}f(\eta)\,d\eta.$$

Переходя от функции Бесселя $J_{\nu}$ к нормированной функции Бесселя $j_{\nu}$, получаем

$$\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}f(y)=\frac{1}{2^{2\nu}\Gamma(\nu+1)}\int_{0}^{\infty}j_{\nu}(y\eta)\,\eta^{2\nu}f(\eta)\,d\eta. \qquad (2.4.6)$$

Лемма 2.4.2. *Пусть* $f\in \overset{0}{C}{}^{\infty}_{-}(\overline{E^1_+})$ *и* $\nu\geqslant 0$. *Тогда справедливо представление*

$$\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}f=F_{\nu}^{-1}\left(\frac{1}{\eta}F_{-}f\right). \tag{2.4.7}$$

*Если* $f\in \overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(\overline{E^1_+})$, *то*

$$S_{\nu}^{\nu-1/2}f=F_{-}^{-1}(\eta F_{\nu}f). \tag{2.4.8}$$

*Оператор* $\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}$ *взаимно однозначно отображает пространство* $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{-}(\overline{E^1_+})$ *на* $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(\overline{E^1_+})$. *Оператор* $S_{\nu}^{\nu+1/2}$ *осуществляет обратное отображение.*

Доказательство. Формула (2.4.7) — просто другая форма записи формулы (2.4.6). Формула (2.4.8) доказывается обращением предыдущей. Пусть $f\in \overset{0}{C}{}^{\infty}_{-}(\overline{E^1_+})$. Тогда $F_{-}f(\eta)$ — нечетная быстро убывающая функция, следовательно, $\frac{1}{\eta}F_{-}f(\eta)$ — четная гладкая быстро убывающая функция. Оператор $F_{\nu}$ является автоморфизмом такого класса функций. Значит, $F_{\nu}^{-1}\left(\frac{1}{\eta}F_{-}f\right)\in \overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(\overline{E^1_+})$ поскольку ее финитность следует из представления оператора $\mathscr{P}_{\nu}^{1/2-\nu}$ по формуле (2.1.7). Аналогично доказывается, что оператор $S_{\nu}^{\nu-1/2}$ отображает пространство $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(\overline{E^1_+})$ в $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{-}(\overline{E^1_+})$. Следовательно, отображения сюръективны. Лемма доказана.

Формулы (2.4.7) и (2.4.8) замечательны тем, что с помощью их аналогов можно построить новый класс операторов преобразования (см. [56]). Пусть $\nu\geqslant -1/2$; тогда положим

$$\mathscr{P}_{\nu,\pm}^{(\varphi)}=F_{\nu}^{-1}\left[\varphi(\eta)F_{\pm}\right],\quad S_{\nu,\pm}^{(\varphi)}\left[\frac{1}{\varphi(\eta)}F_{\nu}\right], \tag{2.4.9}$$

где $\varphi(\eta)$, вообще говоря, произвольная функция. Нетрудно заметить, что на подходящих областях определения операторы $\mathscr{P}_{\nu,\pm}^{(\varphi)}$ и $S_{\nu,\pm}^{(\varphi)}$ действительно будут операторами преобразования. Отметим наиболее важные частные случаи. Если $\varphi(\eta)=\eta^{2\nu+1}$, то операторы $\mathscr{P}_{\nu,\pm}^{(\varphi)}$ и $S_{\nu,\pm}^{(\varphi)}$ совпадают с классическими операторами Пуассона и Сонина. Если $\varphi(\eta)\equiv 1$, то $\mathscr{P}_{\nu,+}^{(\varphi)}=\mathscr{P}_{\nu}^{-1/2-\nu}$, $S_{\nu,+}^{(\varphi)}=S_{\nu}^{\nu+1/2}$. Если же $\varphi(\eta)=\eta^{\nu+1/2}$, то

$$\mathscr{P}_{\nu,+}^{(\varphi)}f(y)=F_{\nu}^{-1}\left[\eta^{\nu+1/2}F_{+}f\right]=$$
$$=\frac{-1}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+1)}\left\{\frac{\Gamma(\nu+1/2)\sin(\pi\nu+\pi/2)}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\times\right.$$
$$\times\int_y^\infty {}_2F_1(\nu/2+3/4;\ \nu/2+1/4;\ \nu+1;\ y^2/t^2)\frac{df(t)}{dt}dt+$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2}\,\Gamma(\nu/2+3/4)}{\Gamma(\nu/2+1/4)}\cdot\frac{1}{y}\int_0^y {}_2F_1(\nu/2+3/4;\ 3/4-\nu/2;\ 3/2;\ t^2/y^2)\frac{df(t)}{dt}dt\right\},$$

$$S_{\nu,+}^{(\varphi)} f(y) = F_+^{-1}\left[\eta^{-\nu-1/2} F_\nu f\right] =$$

$$= \frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)}{\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\Gamma(\nu+1)\sin(\pi\nu+\pi/2)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\times\right.$$

$$\times y^{-\nu-1/2}\int_0^y {}_2F_1(\nu/2+3/4;\ \nu/2-1/4;\ \nu+1;\ t^2/y^2)\, t^{2\nu+1} f(t)\,dt +$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(\nu/2-3/4)}{\Gamma(\nu/2+1/4)}\, y \int_y^\infty {}_2F_1(\nu/2+3/4;\ 3/4-\nu/2;\ 3/2;\ y^2/t^2)\, t^{\nu-1/2}\,dt\right\}. \quad (2.4.10)$$

Операторы (2.4.10) назовем изометрическими, поскольку они изометрически отображают $L_2$ в $L_{2,\nu}$. Основные свойства этих операторов аналогичны свойствам операторов Пуассона и Сонина. В [55] указаны приложения этих операторов.

Введем теперь операторы преобразования $\mathscr{P}_{\nu,e}$ и $S_{\nu,e}$ по следующим формулам:

$$\mathscr{P}_{\nu,e} = \mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu} I_e^{\nu-1/2}, \quad S_{\nu,e} = I_e^{1/2-\nu} S_\nu^{\nu-1/2}. \quad (2.4.11)$$

Операторы (2.4.11) можно также выразить в виде

$$\mathscr{P}_{\nu,e} = \mathscr{P}_\nu J_{\nu-1/2,e}, \quad S_{\nu,e} = J_{1/2-\nu,e} S_\nu, \quad (2.4.12)$$

где $J_{\mu,e} = I_e^\mu I^{-\mu}$.

Конструкция операторов $\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}$, $S_\nu^{\nu-1/2}$, $\mathscr{P}_\nu$, $S_\nu$, $I_e^\mu$ приведена в § 2.1 и 2.2. Из результатов предыдущих параграфов этой главы следует, что операторы $\mathscr{P}_{\nu,e}$ и $S_{\nu,e}$ взаимно однозначно отображают $\overset{0}{C}{}_{\{0\}}^\infty(E_+^1)$ на себя, являются взаимно обратными и для них справедливы формулы

$$B_\nu \mathscr{P}_{\nu,e} = \mathscr{P}_{\nu,e} D^2, \quad D^2 S_{\nu,e} = S_{\nu,e} B_\nu. \quad (2.4.13)$$

Выясним связь оператора $\mathscr{P}_{\nu,e}$ с преобразованием Фурье. Пусть $f \in \overset{0}{C}{}^\infty(E_+^1)$ и $\mu$ — комплексное число. Тогда при $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$ по теореме Фубини получаем

$$FI_e^\mu f(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\eta}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_y^\infty (t-y)^{\mu-1} e^{y-t} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int_{-\infty}^t e^{-iy\eta}(t-y)^{\mu-1} e^{y-t}\,dy\,dt.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^t e^{-iy\eta}(t-y)^{\mu-1} e^{y-t}\,dt = e^{-it\eta}(1-i\eta)^{-\mu}\,\Gamma(\mu),$$

то имеем

$$FI_e^{\mu} f(\eta) = (1 - i\eta)^{-\mu} Ff(\eta). \qquad (2.4.14)$$

В силу принципа аналитического продолжения эта формула имеет место для всех комплексных $\mu$. Учитывая формулы (2.4.14), (2.4.3) при $\mathrm{Re}\,\nu \geqslant 0$, получаем следующее представление для оператора $\mathscr{P}_{\nu, e}$:

$$\mathscr{P}_{\nu, e} f(y) = \frac{iy^{-\nu}}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+1)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\nu}^{(1)}(y\eta)\, \eta^{\nu} (1 - i\eta)^{1/2-\nu} F\Pi f(\eta)\, d\eta \qquad (2.4.15)$$

для любой функции $f \in \overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(E_+^1)$.

## § 2.5. Операторы преобразования и функциональные пространства (одномерный случай)

В этом параграфе с помощью операторов преобразования будут построены новые функциональные пространства. Обозначим, как и выше, через $L_{2,\nu}(E_+^1)$, $\nu \geqslant -1/2$, гильбертово пространство функций $f(y)$, $y > 0$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{2,\nu}(E_+^1)} = \int\limits_0^{\infty} |f(y)|^2 y^{2\nu+1}\, dy. \qquad (2.5.1)$$

Известно (см. § 1.3), что преобразование Ганкеля $F_{\nu}$ отображает $L_{2,\nu}(E_+^1)$ на себя, и справедливо равенство Парсеваля

$$\|F_{\nu} f\|_{L_{2,\nu}(E_+^1)} = 2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\, \|f\|_{L_{2,\nu}(E_+^1)}. \qquad (2.5.2)$$

Функциональное пространство $H_{\nu,+}^s(E_+^1)$, $s \geqslant 0$, $\nu \geqslant -1/2$, введенное в работе [66], определяется как замыкание по норме

$$\|f\|_{H_{\nu,+}^s(E_+^1)} = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} \|(1+\eta^2)^{s/2} F_{\nu} f\|_{L_{2,\nu}(E_+^1)} \qquad (2.5.3)$$

множества функций $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(E_+^1)$. Предположение о четности здесь существенно, поскольку для нечетных функций норма может быть равна бесконечности. Далее в этом параграфе предполагается, что $s$ — целое число.

Если замкнуть по той же норме (2.5.3) множество $\overset{0}{C}{}^{\infty}(0, R)$, $R < \infty$, то получим пространство $\overset{0}{H}{}_{\nu,+}^s(0, R)$, которое непрерывно вложено в пространство $H_{\nu,+}^s(E_+^1)$. В пространстве $\overset{0}{H}{}_{\nu,+}^s(0, R)$ выражение

$$\|f\|_{\overset{0}{H}{}_{\nu,+}^s(0,R)} \equiv \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} \|\eta^s F_{\nu} f\|_{L_{2,\nu}(E_+^1)} \qquad (2.5.4)$$

является нормой, эквивалентной норме (2.5.3). Из равенства Парсеваля (2.5.2) следует, что при четных $s \geqslant 0$

$$\|f\|_{\overset{0}{H}{}_{\nu,+}^s(0,R)} = \|B_{\nu}^{s/2} f\|_{L_{2,\nu}(0,R)}.$$

Определим пространство Соболева $\overset{0}{H}{}^s(0, R)$, $s \geqslant 0$, $0 < R < \infty$, как замыкание множества $\overset{0}{C}{}^\infty(0, R)$ по норме

$$\| f \|_{\overset{0}{H}{}^s(0,R)} = \| D^s f \|_{L_2(0,R)}.$$

Лемма 2.5.1. *Пусть* $s \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$. *Тогда оператор преобразования* $S_\nu$ *расширяется по непрерывности до ограниченного оператора, отображающего пространство* $\overset{0}{H}{}^s_{\nu,+}(0, R)$ *в* $\overset{0}{H}{}^s(0, R)$, *причем справедлива оценка*

$$\min\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \left|\cos\frac{\pi(\nu+s)}{2}\right|\right) \| f \|_{\overset{0}{H}{}^s_{\nu,+}(E^1_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)} \| S_\nu f \|_{\overset{0}{H}{}^s(0,R)} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \left|\cos\frac{\pi(\nu+s)}{2}\right|\right) \| f \|_{\overset{0}{H}{}^s_{\nu,+}(0,R)}. \qquad (2.5.5)$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $s=0$, рассуждения при $s>0$ вполне аналогичны. Докажем справедливость формулы

$$S_\nu f(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \cos\left(y\eta - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \eta^{\nu+1/2} F_\nu f(\eta)\, d\eta \qquad (2.5.6)$$

для $\nu \geqslant 0$ и $f \in \overset{0}{C}{}^\infty_+(\overline{E^1_+})$. На этом множестве ранее было получено следующее представление оператора $S_\nu$:

$$S_\nu f = I^{1/2-\nu} F_-^{-1}(\eta F_\nu f). \qquad (2.5.7)$$

Отсюда для полуцелых $\nu$ сразу же вытекает справедливость (2.5.6), поскольку оператор $I^{1/2-\nu}$ в этом случае есть просто оператор дифференцирования $(-1)^{\nu-1/2} D^{\nu-1/2}$. Пусть теперь $n \geqslant 0$ — четное число и $n - 1/2 < \nu < n + 1/2$. Так как функция $\eta^{1+n} F_\nu f$ — гладкая, нечетная и быстро убывающая на бесконечности, то по теореме Фубини имеем:

$$S_\nu f(y) = I^{1/2-\nu} F_-^{-1} \eta F_\nu f(y) =$$
$$= (-1)^n I^{1/2-\nu+n} D^n F^{-1} \eta F_\nu f(y) =$$
$$= (-1)^{n/2} I^{1/2-\nu+n} F_-^{-1} \eta^{1+n} F_\nu f(y) =$$
$$= \frac{2(-1)^{n/2}}{\pi\Gamma(1/2-\nu+n)} \int\limits_y^\infty (t-y)^{n-\nu-1/2} \int\limits_0^\infty \sin(t\eta)\, \eta^{1+n} \times$$
$$\times F_\nu f(\eta)\, d\eta\, dt = \frac{2(-1)^{n/2}}{\pi\Gamma(1/2-\nu+n)} \lim_{A\to\infty} \int\limits_y^A (t-y)^{n-\nu-1/2} \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \sin(t\eta)\, \eta^{1+n} F_\nu f(\eta)\, d\eta\, dt = \frac{2(-1)^{n/2}}{\pi\Gamma(1/2-\nu+n)} \times$$

$$\times \lim_{A\to\infty} \int_0^\infty \eta^{1+n} f(\eta) \int_y^A (t-y)^{n-\nu-1/2} \sin(t\eta)\, dt\, d\eta =$$

$$= \frac{2(-1)^{n/2}}{\pi \Gamma(1/2-\nu+n)} \lim_{A\to\infty} \int_0^\infty \eta^{1+n} f(\eta) \left( \int_y^\infty - \int_A^\infty \right) d\eta, \qquad (2.5.8)$$

где в последнем выражении два внутренних интеграла понимаются как несобственные. Первый из них — табличный интеграл

$$\int_y^\infty (t-y)^{n-\nu-1/2} \sin(t\eta)\, dt =$$

$$= \eta^{\nu-n-1/2} \Gamma(n-\nu+1/2) \cos(y\eta - \pi(\nu-n)/2 - \pi/4), \qquad (2.5.9)$$

а второй с помощью интегрирования по частям оценивается следующим образом:

$$\left| \int_A^\infty (t-y)^{n-\nu-1/2} \sin(t\eta)\, dt \right| = \frac{1}{\eta} \left| \int_A^\infty (t-y)^{n-\nu-1/2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial}{\partial t} \cos(t\eta)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{\eta} \left( (A-y)^{n-\nu-1/2} |\cos(A\eta)| + \right.$$

$$\left. + (1/2+\nu-n) \left| \int_A^\infty (t-y)^{n-\nu-3/2} \cos(t\eta)\, dt \right| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\eta} \left( (A-y)^{n-\nu-1/2} + (1/2+\nu-n) \int_A^\infty (t-y)^{n-\nu-3/2}\, dt \right) =$$

$$= \frac{2}{\eta} (A-y)^{n-\nu-1/2}. \qquad (2.5.10)$$

Подставляя (2.5.9), (2.5.10) в (2.5.8), мы получаем формулу (2.5.6). Пусть теперь $n>0$ — нечетное и $n-1/2<\nu<n+1/2$; тогда аналогично предыдущему получаем

$$S_\nu f(y) = (-1)^n I^{1/2-\nu+n} D^n F_-^{-1} \eta F_\nu f(y) =$$

$$= (-1)^{\frac{n+1}{2}} I^{1/2-\nu+n} F_+^{-1} \eta^{1+n} F_\nu f(y) =$$

$$= \frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi \Gamma(1/2+n-\nu)} \int_y^\infty (t-y)^{n-\nu-1/2} \int_0^\infty \cos(t\eta)\, \eta^{1+n} F_\nu f(\eta)\, d\eta\, dt =$$

$$= \frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi \Gamma(1/2+n-\nu)} \int_0^\infty \eta^{1+n} F_\nu f(\eta) \int_y^\infty (t-y)^{n-\nu-1/2} \cos(t\eta)\, dt\, d\eta.$$

Так как

$$\int_{y}^{\infty}(t-y)^{n-\nu-1/2}\cos(t\eta)\,dt=$$

$$=-\eta^{\nu-n-1/2}\Gamma(1/2+n-\nu)\sin(y\eta-\pi(\nu-n)/2-\pi/4), \qquad (2.5.11)$$

то и в этом случае установлена справедливость (2.5.6).

Рассмотрим встретившийся в (2.5.6) оператор $A_\nu$ вида

$$A_\nu f(y)=\int_0^\infty \cos\left(y\eta-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)f(\eta)\,d\eta, \qquad (2.5.12)$$

который является линейной комбинацией тригонометрических преобразований Фурье и потому ограничен в $L_2(E^1_+)$. Введем несколько видоизмененный оператор Меллина $M$ по формуле

$$Mg(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^{ip-1/2}g(y)\,dy, \qquad p\in E^1. \qquad (2.5.13)$$

Нетрудно заметить, что оператор $M$ изометрично отображает пространство $L_2(E^1_+)$ на $L_2(E^1)$.

Пусть для простоты функция $f\in \overset{0}{C}{}^\infty(E^1_+)$, тогда с использованием формул (2.5.9) и (2.5.11), действуя, как и при выводе формулы (2.5.6), получаем

$$MA_\nu f(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^{ip-1/2}\int_0^\infty \cos\left(y\eta-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)f(\eta)\,d\eta\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(\eta)\int_0^\infty y^{ip-1/2}\cos\left(y\eta-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dy\,d\eta=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(\eta)\,\eta^{-ip-1/2}\,\Gamma(ip+1/2)\sin\frac{\pi(ip-\nu-1)}{2}\,d\eta=$$

$$=-\Gamma(ip+1/2)\sin\frac{\pi(ip-\nu-1)}{2}\,Mf(-p)\equiv a_\nu(p)\,Mf(-p).$$

Отсюда из указанной изометричности оператора $M$ следует двусторонняя оценка для оператора (2.5.12)

$$\inf_{p\in E^1}|a_\nu(p)|\cdot\|f\|_{L_2(E^1_+)}\leqslant\|A_\nu f\|_{L_2(E^1_+)}\leqslant\sup_{p\in E^1}|a_\nu(p)|\cdot\|f\|_{L_2(E^1_+)}, \qquad (2.5.14)$$

постоянные в которой являются точными. Из известной формулы $|\Gamma(ip+1/2)|=\sqrt{\pi}\,\sqrt{\operatorname{ch}(\pi p)}$, а также из формулы

$$\left|\sin\frac{\pi(ip-\nu-1)}{2}\right|=\left(\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi(\nu+1)}{2}\right)^2$$

находим, что

$$\sup_{p\in E^1}|a_\nu(p)|=\sqrt{\pi}\sup_{p\in E^1}\frac{\sqrt{\left(\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi\nu}{2}\right)^2}}{\sqrt{\operatorname{ch}(\pi p)}}=$$

$$=\sqrt{\pi}\left(\sup_{p\in E^1}\frac{\left(\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi\nu}{2}\right)^2}{1+2\left(\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2}\right)^2}\right)^{1/2}=\sqrt{\pi}\left(\sup_{t\geqslant 0}\frac{t+\left(\cos\frac{\pi\nu}{2}\right)^2}{1+2t}\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{\pi}\left(\max\left(\left.\frac{t+\left(\cos\frac{\pi\nu}{2}\right)^2}{1+2t}\right|_{t=0};\ \left.\frac{t+\left(\cos\frac{\pi\nu}{2}\right)^2}{1+2t}\right|_{t=\infty}\right)\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{\pi}\left(\max\left(1/2,\ \left(\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right)^2\right)\right)^{1/2}=\sqrt{\pi}\max\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \left|\cos\frac{\pi\nu}{2}\right|\right).$$

Аналогичным образом получаем

$$\inf_{p\in E^1}|a_\nu(p)|\leqslant\sqrt{\pi}\min\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \left|\cos\frac{\pi\nu}{2}\right|\right).$$

Таким образом, оценка (2.5.14) принимает вид

$$\sqrt{\pi}\cdot\min\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \left|\cos\frac{\pi\nu}{2}\right|\right)\cdot\|f\|_{L_2(E^1_+)}\leqslant\|A_\nu f\|_{L_2(E^1_+)}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\pi}\cdot\max\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \left|\cos\frac{\pi\nu}{2}\right|\right)\cdot\|f\|_{L_2(E^1_+)}. \qquad (2.5.15)$$

Заметим попутно, что оператор $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,A_\nu$ унитарен в $L_2(E^1_+)$ только при полуцелых $\nu$ ($A_\nu$ сводится в этом случае к косинус- или синус-преобразованию), а имеет ограниченный обратный в $L_2(E^1_+)$ только при $\nu\neq\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ldots$

Для завершения доказательства достаточно соединить формулу (2.5.6), оценку (2.5.15), а также равенство Парсеваля (2.5.2). Лемма 2.5.1 доказана.

Следствие 2.5.1. *В случае* $s=0$, $R=\infty$ *постоянные в оценке* (2.5.2) *являются точными.*

Это утверждение вытекает из точности постоянных в оценке (2.5.15).

Следствие 2.5.2. *Оператор* $\sqrt{\pi}\, 2^{-\nu-1/2}\Gamma^{-1}(\nu+1) S_\nu$ *при полуцелых* $\nu>0$ *изометрично отображает пространство* $L_{2,\nu}(E^1_+)$ *на* $L_2(E^1_+)$.

Доказательство. Изометричность следует из формулы (2.5.5), в которой при $s=0$ можно положить $R=\infty$. Из леммы 2.4.2 вытекает, что множество $S_\nu \overset{0}{C}{}^\infty_+(\overline{E^1_+})$ состоит из всех функций $f$ вида $f=I^{1/2-\nu}g$; $g\in \overset{0}{C}{}^\infty_-(\overline{E^1_+})$. Это множество всюду плотно в пространстве $L_2(E^1_+)$. Следствие доказано.

Введем новое функциональное пространство $\overset{0}{H}{}^s_\nu(0, R)$. Обозначим через $\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(0, R)$ множество всех функций $f$, допускающих представление $f=\mathscr{P}_\nu g$, в котором $g\in \overset{0}{C}{}^\infty[0, R)$. Ясно, что $\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(0, R)\subset \overset{0}{C}{}^\infty_{\{0\}}(0, R)\subset \subset \overset{0}{C}{}^\infty_{\{0\}}(E^1_+)$. На $\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(0, R)$ введем следующую норму:

$$\| f\|_{\overset{0}{H}{}^s_\nu(0, R)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}\| S_\nu f\|_{\overset{0}{H}{}^s(0, R)}. \tag{2.5.16}$$

Это определение корректно, поскольку по условию $S_\nu f\in \overset{0}{C}{}^\infty[0, R)$.

Обозначим через $\overset{0}{H}{}^s_{\rm loc}(0, R)$ множество всех функций $f(y)$, равных нулю при $y\geqslant R$, для которых при любом $\varepsilon>0$ конечны полунормы

$$P_{\varepsilon,s}(f)=\| D^s f\|_{L_2(\varepsilon, R)}.$$

Пространство $\overset{0}{H}{}^s_{\rm loc}(0, R)$ с топологией, порожденной этими полунормами, является пространством Фреше.

Замыкание в $\overset{0}{H}{}^s_{\rm loc}(0, R)$ линеала $\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(0, R)$ по норме (2.5.16) мы и будем обозначать через $\overset{0}{H}{}^s_\nu(0, R)$. Поскольку $\overset{0}{C}{}^\infty_+[0, R)\subset \overset{0}{C}{}^\infty_\nu(0, R)$ при любых $\nu$, то пространство $\overset{0}{H}{}^s_{0,+}(0, R)$ по лемме 2.5.1 непрерывно вложено в $\overset{0}{H}{}^s_\nu(0, R)$, причем индуцированная и собственная нормы $\overset{0}{H}{}^s_{\nu,+}(0, R)$ эквивалентны друг другу при $s+\nu\neq 1;\ 3;\ 5;\dots$

Введем весовую функцию $\sigma_\nu$ по формуле

$$\sigma_\nu(y)=\begin{cases} y^{2\nu}, & \text{если } \nu>0,\\ -1/\ln y, & \text{если } \nu=0.\end{cases}$$

*Весовым граничным значением* или, короче, $\sigma_\nu$-*следом* функции $f(y)$ в точке $y=0$ назовем предел

$$\sigma_\nu f|_{y=0}=\lim_{y\to+0}\sigma_\nu(y)f(y).$$

Теорема 2.5.1. *Пусть* $\nu\geqslant 0$, $s>1/2$ *и* $s+\nu>1$. *Пусть* $0<R<\infty$. *Тогда у любой функции* $f$ (*после исправления ее на множестве меры нуль, если это необходимо*) *из пространства* $\overset{0}{H}{}^s_\nu(0, R)$ *существует*

*в точке $y=0$ весовой $\sigma_\nu$-след. При этом справедливо неравенство*

$$|\sigma_\nu f|_{y=0}| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2^{\nu-1} R^{s+\nu-1}\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+\nu-1/2)\sqrt{s+\nu-1}}\, \|f\|_{\overset{0}{H}{}^s_\nu(0,R)}, & \text{если } \nu>0, \\ \dfrac{2R^{s-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-1/2)\sqrt{s-1}}\, \|f\|_{\overset{0}{H}{}^s_0(0,R)}, & \text{если } \nu=0, \end{cases} \tag{2.5.17}$$

*постоянные в котором являются точными.*

Доказательство. Неравенство (2.5.17) достаточно установить для функции $f\in \overset{0}{C}{}^\infty_\nu(0, R)$. Для таких функций по лемме (2.4.1) (§ 2.4) $\sigma_\nu$ след существует, причем имеет место формула

$$\lim_{y\to+0} \sigma_\nu(y) f(y) = \lim_{y\to+0} \sigma_\nu(y)\, \mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu} S_\nu^{\nu-1/2} f(y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2} S_\nu^{\nu-1/2} f|_{y=0}, & \text{если } \nu>0, \\ S_0^{-1/2} f|_{y=0}, & \text{если } \nu=0. \end{cases} \tag{2.5.18}$$

Пусть $g\in \overset{0}{C}{}^\infty[0, R)$. Тогда по неравенству Коши—Буняковского при $\alpha>1/2$ получаем

$$|g(0)| = |I^\alpha I^{-\alpha} g|_{y=0}| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^R t^{\alpha-1} I^{-\alpha} g(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^R t^{2\alpha-2}\,dt \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^R |I^{-\alpha} g|^2\,dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{R^{\alpha-1/2}}{\Gamma(\alpha)\sqrt{2\alpha-1}}\, \|g\|_{\overset{0}{H}{}^\alpha(0,R)}.$$

Подставляя в это неравенство вместо $g$ функцию $S_\nu^{\nu-1/2} = I^{\nu-1/2} S_\nu f$, принадлежащую, очевидно, пространству $\overset{0}{C}{}^\infty[0, R]$, получим

$$|S_\nu^{\nu-1/2} f(0)| \leqslant \frac{R^{\alpha-1/2}}{\Gamma(\alpha)\sqrt{2\alpha-1}}\, \|S_\nu f\|_{\overset{0}{H}{}^{\alpha-\nu+1/2}(0,R)}.$$

Заменяя здесь $\alpha$ на $s+\nu-1/2$ и учитывая (2.5.18) мы приходим к неравенству (2.5.17).

Покажем, что постоянные в (2.5.17) являются точными. Рассмотрим функцию

$$f_0(y) = \begin{cases} \int_y^R (t-y)^{s+\nu-3/2}\, t^{s+\nu-3/2}\,dt, & \text{если } 0<y<R, \\ 0, & \text{если } y\geqslant R. \end{cases}$$

Покажем, что функция $I^{1/2-\nu} f_0(y)$ принадлежит $\overset{0}{H}{}^s(0, R)$. Для этого

достаточно показать, что функция $I^{1/2-s-\nu}f_0$ ограничена в окрестности $y=R$. При $y<R$ имеем

$$I^{1/2-s-\nu}f_0(y)=\frac{(-1)^{[s+\nu-1/2]+1}}{\Gamma(3/2-s-\nu+[s+\nu-1/2])}D_y^{[s+\nu-1/2]+1}\times$$

$$\times\int\limits_y^R(t-y)^{1/2-s-\nu+[s+\nu-1/2]}\int\limits_t^R(\tau-t)^{s+\nu-3/2}\,\tau^{s+\nu-3/2}\,d\tau\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(s+\nu-1/2)\,(-1)^{[s+\nu-1/2]+1}}{\Gamma([s+\nu+1/2])}\cdot D_y^{[s+\nu-1/2]+1}\int\limits_y^R\tau^{s+\nu-3/2}\times$$

$$\times(\tau-y)^{[s+\nu-1/2]}\,d\tau=\Gamma(s+\nu-1/2)\,y^{s+\nu-1/2}.$$

Следовательно, $I^{1/2-\nu}f_0\in\overset{0}{H}{}^s(0,\,R)$ и, кроме того,

$$\|I^{1/2-\nu}f_0\|_{\overset{0}{H}{}^s(0,\,R)}=\frac{\Gamma(s+\nu-1/2)}{\sqrt{2s+2\nu-2}}\cdot R^{s+\nu-1}. \qquad (2.5.19)$$

Тогда функция $f_1(y)=\mathscr{P}_\nu I^{1/2-\nu}f_0\in\overset{0}{H}{}^s_\nu(0,\,R)$. При $\nu>0$ имеем

$$\sigma_\nu f_1|_{y=0}=\frac{1}{2\nu}\,S_\nu^{\nu-1/2}f_1(0)=\frac{R^{2s+2\nu-2}}{4\nu(s+\nu-1)}.$$

Из (2.5.19) находим, что

$$\|f_1\|_{\overset{0}{H}{}^s_\nu(0,\,R)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}\;\|I^{1/2-\nu}f_0\|_{\overset{0}{H}{}^s(0,\,R)}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+\nu-1/2)\,R^{s+\nu-1}}{2^{\nu+1}\,\Gamma(\nu+1)\sqrt{s+\nu-1}}.$$

Две последние формулы показывают, что первое соотношение в (2.5.17) превращается для функции $f_1\in\overset{0}{H}{}^s_\nu(0,\,R)$ в равенство. Аналогичный результат справедлив и для второго соотношения. Теорема доказана.

Известна следующая формула (см. [7]):

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\Gamma(\nu+\alpha)}{\Gamma(\nu+\beta)}\,\nu^{\beta-\alpha}=1. \qquad (2.5.20)$$

Поэтому имеют место такие два следствия.

Следствие 2.5.3. *В условиях теоремы* 2.5.1 *справедлива оценка*

$$|\sigma_\nu f|_{y=0}|\leqslant C(s,\,R)\,2^\nu R^\nu(\nu+1)^{-s}\,\|f\|_{\overset{0}{H}{}^s_\nu(0,\,R)}, \qquad (2.5.21)$$

*где* $\nu\geqslant0$, *причем постоянная* $C(s,\,R)$ *зависит лишь от* $R$ *и* $s$.

Следствие 2.5.4. *Пусть* $\nu\geqslant0$; $s-2k-1/2>0$, $s-2k+\nu>1$ $(k=0;\ 1;\ 2;\ldots)$ *и пусть* $0<R<\infty$. *Тогда для любой функции* $f\in\overset{0}{H}{}^s_\nu(0,\,R)$ (*после исправления на множестве меры нуль*) *существует* $\sigma_\nu$-*след функции* $B_\nu^k f$ *в точке* $y=0$. *Справедлива оценка*

$$|\sigma_\nu B^k f|_{y=0}|\leqslant C(k,\,s,\,R)\,2^\nu R^\nu(\nu+1)^{2k-s}\,\|f\|_{\overset{0}{H}{}^s_\nu(0,\,R)}, \qquad (2.5.22)$$

*где постоянная зависит лишь от* $s$, $k$ *и* $R$.

## § 2.6. Некоторые свойства пространства Соболева

Пусть $E^n$ обозначает $n$-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1, ..., x_n)$. Пусть $\Theta$ — единичная сфера в $E^n$. Введем сферические координаты $r\geqslant 0$, $\theta\in\Theta$, где $r=|x|$, $\theta=x/|x|$. В угловых координатах $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ вектор $\theta=(\theta_1, ..., \theta_n)$ выражается по формулам:

$$\theta_1=\cos\varphi_1,$$
$$\theta_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\theta_{n-1}=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$
$$\theta_n=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.$$

Оператор Лапласа

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

в сферических координатах записывается в виде

$$\Delta=B_{(n-2)/2}+\frac{1}{r^2}\Delta_\theta,$$

где оператор Бесселя $B_\nu=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\nu+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, $\nu=\frac{n}{2}-1$, называется *радиальной частью* оператора $\Delta$, а оператор

$$\Delta_\theta=\frac{1}{\sin^{n-2}\varphi_1}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\sin^{n-2}\varphi_1\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sin^2\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left(\sin^{n-3}\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\dots\sin^2\varphi_{n-2}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_{n-1}^2}$$

называется *угловой частью* оператора $\Delta$.

*Сферической гармоникой порядка* $k=0, 1, 2, ...$, называется функция $Y_k(\theta)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta_\theta Y_k+k(n+k-2)Y_k=0 \tag{2.6.1}$$

на сфере. Это уравнение имеет $d_k=\frac{(n+2k-2)(k+n-3)!}{k!(n-2)!}$ линейно независимых ортонормированных в $L_2(\Theta)$ решений $Y_{k,l}$ $(l=1, ..., d_k)$. Система функций $Y_{k,l}$ $(k=0, 1; ...; l=1, ..., d_k)$ образует ортнормированный базис в $L_2(\Theta)$ (см. [164], [166]). Для функции $f(x)$ коэффициенты ее разложения по сферическим гармоникам определяются по формуле

$$f_{k,l}(r)=\int_\Theta f(r,\Theta)\,Y_{k,l}(\theta)\,d\theta. \tag{2.6.2}$$

Для функции $f \in \overset{0}{C}{}^{\infty}(E^n)$ ряд по сферическим гармоникам

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(r)\, Y_{k,l}(\theta) \qquad (2.6.3)$$

сходится к ней абсолютно и равномерно.

Пусть $L_2(E^n)$, как обычно, обозначает пространство функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|^2_{L_2(E^n)}=\int_{E^n} |f(x)|^2 dx.$$

Через $L_{2,\nu}(E^1_+)$, как и выше, обозначается множество функций с конечной нормой

$$\|f\|^2_{L_{2,\nu}(E^1_+)}=\int_0^{\infty} |f(r)|^2 r^{2\nu+1}\, dr.$$

Теорема 2.6.1. *Пусть* $f(x)\in L_2(E^n)$. *Тогда ряд по сферическим гармоникам* (2.6.3) *сходится к* $f$ *по норме пространства* $L_2(E^n)$. *При этом*

$$\|f\|_{L_2(E^n)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k} \|r^{-k} f_{k,l}(r)\|^2_{L_{2,n/2+k-1}(E^1_+)}. \qquad (2.6.4)$$

*Обратно, пусть* $f_{k,l}$ ($k=0$, 1, ...; $l=1$, ..., $d_k$) *такова, что* $r^{-k}f_{k,l}\in$ $\in L_{2,n/2+k-1}(E^1_+)$ *и ряд справа по формуле* (2.6.4) *является сходящимся. Тогда ряд в формуле* (2.6.3) *сходится по норме* $L_2(E^n)$ *к некоторой* $f\in L_2(E^n)$, *норма которой вычисляется по формуле* (2.6.4).

Рассмотрим преобразование Фурье $\mathscr{F}$ в евклидовом пространстве $E^n$:

$$\mathscr{F}f(\xi)=\int_{E^n} f(x)\, e^{-i(x,\xi)}\, dx,$$

где $\xi=(\xi_1;\,...;\,\xi_n)\in E^n_\xi$, $(x,\xi)=x_1\xi_1+...+x_n\xi_n$ на функциях вида $f(x)=g(r)\,Y_k(\theta)$. Пусть $\rho=|\xi|$, $\theta=\xi/|\xi|$ — сферические координаты в двойственном пространстве $E^n_\xi$.

Если $r^{-k}g(r)\in L_{2;n/2+k-1}(E^1_+)$, то имеем

$$\mathscr{F}[gY_k](\rho,\theta)=(-i)^k(2\pi)^{n/2}\rho^{1-n/2}\,Y_k(\theta)\int_0^{\infty} J_{n/2+k-1}(r\rho)\,g(r)\,r^{n/2}\,dr. \qquad (2.6.5)$$

Заменяя функцию Бесселя первого рода $J_\nu$ на соответствующую нормированную функцию $j_\nu$ и используя одномерное преобразование Ганкеля (см., например, § 2.4), предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\mathscr{F}[gY_k](\rho,\theta)=\frac{(-i)^k(2\pi)^{n/2}}{2^{n/2+k-1}\,\Gamma(n/2+k)}\,\rho^k\,Y_k(\theta)\,F_{n/2+k-1}(r^{-k}g)(\rho). \qquad (2.6.6)$$

Все перечисленные факты можно, например, найти в [163], [164]. Мы их сформулировали в удобных для нас обозначениях.

Пусть $U_R\subset E^n$ — открытый шар радиуса $R<\infty$ с центром в начале координат. Пусть, как обычно,

$$\overset{0}{C}{}^{\infty}(U_R)=\{f\colon f\in \overset{0}{C}{}^{\infty}(E^n),\ \operatorname{supp}(f)\subset U_R\}.$$

Пространство $\overset{0}{H}{}^s(U_R)$ для $s\geqslant 0$ определим как замыкание множества функций $\overset{0}{C}{}^\infty(U_R)$ по норме

$$\|f\|^2_{\overset{0}{H}{}^s(U_R)}=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{E^n}|\mathscr{F}f(\xi)|^2|\xi|^{2s}d\xi, \tag{2.6.7}$$

где $|\xi|^2=\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$.

Обозначим через $\overset{0}{T}{}^\infty_+(U_R)$ множество функций вида

$$f(r,\theta)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}f_{k,l}(r)\,Y_{k,l}(\theta), \tag{2.6.8}$$

где функции $r^{-k}f_{k,l}\in\overset{0}{C}{}^\infty_+\,[0,\ R)$. Натуральное число $K$ — свое для каждой функции.

Лемма 2.6.1. *Множество $\overset{0}{T}{}^\infty_+(U_R)$ всюду плотно в пространстве $\overset{0}{H}{}^s(U_R)$ при $s\geqslant 0$.*

Доказательство. Так как множество линейных комбинаций вида

$$f(x)=\chi(r)\,Q(x),$$

где $\chi(r)$ — произвольная функция из пространства $\overset{0}{C}{}^\infty\,[0,\,R)$, $Q(x)$ — однородный полином $n$ переменных, всюду плотно в $\overset{0}{H}{}^s(U_R)$, то достаточно показать, что функция $f$, определяемая формулой (2.6.9), принадлежит классу $\overset{0}{T}{}^\infty_+(U_R)$. Обозначим через $q$ степень полинома $Q(x)$. Тогда из представления Гаусса однородных полиномов находим разложение

$$Q(x)=Q_0(x)+|x|^2Q_1(x)+\ldots+|x|^{2l}Q_l(x),$$

где $2l\leqslant q$ и $Q_j$ — однородные гармонические полиномы степени $q-2j$; $j=0,\ 1,\ \ldots,\ l$. Вследствие однородности

$$Q_j(x)=r^{q-2j}Q_j(\theta),$$

причем функция $Q_j(\theta)\equiv Y_{q-2j}(\theta)$ — сферическая гармоника порядка $q-2j$. Комбинируя последние формулы, получаем

$$f(x)=\chi(r)\,Q(x)=\chi(r)\sum_{j=0}^{l}r^{2j}r^{q-2j}\,Y_{q-2j}(\theta). \tag{2.6.9}$$

Последнее разложение эквивалентно разложению (2.6.8), поскольку $r^q\chi(r)\in\overset{0}{C}{}^\infty_+\,[0,\,R)$ и функции $Y_{q-2j}(\theta)$ могут быть представлены в виде линейной комбинации ортонормированных гармоник $Y_{q-2j,l}$ ($l=1,\ 2,\ \ldots;\ d_{q-2j}$). Лемма доказана.

Лемма 2.6.2. *Пусть $r^{-k}f_{k,l}\in\overset{0}{H}{}^s_{n/2+k-1,+}(0,R)$. Тогда функция*

$$f=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}f_{k,l}(r)\,Y_{k,l}(\theta),\quad K<\infty,$$

*принадлежит пространству $\overset{0}{H}{}^s(U_R)$ и имеет место формула*

$$\|f\|^2_{\overset{0}{H}{}^s(U_R)}=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}\|r^{-k}f_{k,l}\|^2_{\overset{0}{H}{}^s_{n/2+k-1,+}}. \tag{2.6.10}$$

Доказательство. В сферических координатах формула (2.6.7) имеет вид

$$\|f\|^2_{\overset{0}{H}{}^s(U_R)}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_\Theta|\mathscr{F}f(\rho,\,\theta)|^2\,d\theta\,\rho^{2s+n-1}\,d\rho.$$

Тогда, используя (2.6.6), получаем

$$\|f\|^2_{\overset{0}{H}{}^s(U_R)}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_\Theta\Big/\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}\frac{(-1)^k(2\pi)^{n/2}}{2^{n/2+k-1}\,\Gamma(n/2+k)}\times$$

$$\times\rho^k\,Y_{k,l}(\theta)\,F_{n/2+k-1}(r^{-k}f_{k,l})\Big/^2\,d\theta\,\rho^{2s+n-1}\,d\rho=$$

$$=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}\frac{1}{2^{n+2k-2}\,\Gamma(n/2+k)}\int_0^\infty|F_{n/2+k-1}(r^{-k}f_{k,l})|^2\,\rho^{2k+2s+n-1}\,d\rho.$$

Отметим, что здесь была использована ортонормированность системы сферических гармоник $Y_{k,l}$ в пространстве $L_2(\Theta)$. Полученная формула в сочетании с определением нормы в $\overset{0}{H}{}^s_{\nu,+}(0,\,R)$ приводит к формуле (2.6.10).

Теорема 2.6.2. *Для того чтобы функция $f$ принадлежала пространству $\overset{0}{H}{}^s(U_R)$ при некоторых $s\geqslant 0$ и $R<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы функции $r^{-k}f_{k,l}$ принадлежали $\overset{0}{H}{}^s_{n/2+k-1,+}(0,\,R)$ и чтобы числовой ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k}\|r^{-k}f_{k,l}\|^2_{\overset{0}{H}{}^s_{n/2+k-1,+}(0,\,R)}\tag{2.6.11}$$

*был сходящимся. При этом функциональный ряд* (2.6.3) *сходится к функции $f$ по норме пространства $\overset{0}{H}{}^s(U_R)$ и имеет место равенство*

$$\|f\|^2_{\overset{0}{H}{}^s(U_R)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k}\|r^{-k}f_{k,l}\|^2_{\overset{0}{H}{}^s_{n/2+k-1,+}(0,R)}.\tag{2.6.12}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f\in\overset{0}{H}{}^s(U_R)$. Тогда по теореме 2.6.1 функции $r^{-k}f_{k,l}\in L_{2,\,n/2+k-1}(0,\,R)$ и ряд (2.6.3) сходится к $f$ по норме $L_2(U_R)$. Применяя к (2.6.3) преобразование Фурье и учитывая формулу (2.6.6), получим

$$\mathscr{F}f(\rho,\,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k}\frac{(-i)^k(2\pi)^{n/2}}{2^{n/2+k-1}\,\Gamma(n/2+k)}\rho^k\,Y_{k,l}(\theta)\,F_{n/2+k-1}(r^{-k}f_{k,l}),$$

причем ряд справа сходится в $L_2(E^n)$ функции $\mathscr{F}f\in L_2(E^n)$. Положим

$$\Sigma_K(\rho,\,\theta)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}\frac{(-i)^k(2\pi)^{n/2}}{2^{n/2+k-1}\,\Gamma(n/2+k)}\rho^k\,Y_{k,l}(\theta)\,F_{n/2+k-1}(r^{-k}f_{k,l}).$$

Тогда для почти всех $\rho>0$ функции $\mathscr{F}f(\rho,\,\theta)$ и $\Sigma_K(\rho,\,\theta)$ принадлежат $L_2(\Theta)$. Учитывая ортонормированность $Y_{k,l}$, найдем

$$0\leqslant\|\mathscr{F}f(\rho,\,\cdot)-\Sigma_K(\rho,\,\cdot)\|^2_{L_2(\Theta)}=\|\mathscr{F}f(\rho,\,\cdot)\|^2_{L_2(\Theta)}-$$

$$-\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}\frac{(2\pi)^n}{2^{n+2k-2}\,\Gamma^2(n/2+k)}|\rho^k\,F_{n/2+k-1}(r^{-k}f_{k,l})|^2.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\rho^{2s+k-1}$ и интегрируя, получаем неравенство

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}\frac{1}{2^{n+2k-1}\Gamma^2(n/2+k)}\int_0^\infty \rho^{2k+2s+n-1}\times$$

$$\times|F_{n/2+k-1}(r^{-k}f_{k,l})|^2\,d\rho\leqslant\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_\Theta|\mathcal{F}f(\rho,\theta)|^2\rho^{2s+n-1}\,d\rho=\|f\|^2_{\overset{0}{H}{}^s(U_R)}.$$

Следовательно, соответствующий числовой ряд сходится. Это, в частности, означает, что $r^{-k}f_{k,l}\in\overset{0}{H}{}^s_{n/2+k-1,+}(0,R)$ и что последовательность $\Sigma_K$ фундаментальна в $\mathcal{F}\overset{0}{H}{}^s(U_R)$. Поскольку она сходится к $\mathcal{F}f$ в смысле $L_2(E^n)$, то она сходится и в смысле пространства $\mathcal{F}\overset{0}{H}{}^s(U_R)$. Тогда ряд (2.6.3) сходится к $f$ в пространстве $\overset{0}{H}{}^s(U_R)$, что и приводит к формуле (2.6.12).

Достаточность. Пусть $r^{-k}f_{k,l}\in\overset{0}{H}{}^s_{n/2+k-1,+}(0,R)$ и числовой ряд (2.6.11) сходится. Тогда последовательность

$$\Sigma_K=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}f_{k,l}(r)\,Y_{k,l}(\theta)$$

фундаментальна в $\overset{0}{H}{}^s(U_R)$. Таким образом, найдется функция $f\in\overset{0}{H}{}^s(U_R)$, для которой имеет место формула (2.6.3), ряд в которой сходится по норме пространства $\overset{0}{H}{}^s(U_R)$. Теорема доказана.

Определим пространство $H^s(E^n)$ как замыкание по норме

$$\|f\|^2_{H^s(E^n)}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E^n}|\mathcal{F}f(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi \tag{2.6.13}$$

множества функций $\overset{0}{C}{}^\infty(E^n)$.

Теорема 2.6.3. *Для того чтобы функция* $f(x)\in H^s(E^n)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $r^{-k}f_{k,l}\in H^s_{n/2+k-1,+}(E^1_+)$ *и чтобы ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k}\|r^{-k}f_{k,l}\|^2_{H^s_{n/2+k-1,+}(E^1_+)} \tag{2.6.14}$$

*был сходящимся. При этом функциональный ряд* (2.6.3) *сходится к функции* $f(x)$ *по норме пространства* $H^s(E^n)$ *и норма* $\|f\|^2_{H^s(E^n)}$ *равна сумме ряда* (2.6.3).

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

## § 2.7. Многомерные операторы преобразования

Сразу же заметим, что разложение оператора Радона по сферическим гармоникам, близкое к многомерным операторам преобразования, ранее было получено Д. Людвигом.

Обозначим через $\overset{0}{T}{}^{\infty}_{\{0\}}(U_{R,0})$ (где $U_{R,0}=U_R\setminus\{0\}$) множество функций вида

$$f(r,\theta)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(r)\,Y_{k,l}(\theta), \tag{2.7.1}$$

где $f_{k,l}(r)\in \overset{0}{C}{}^{\infty}_{\{0\}}(0,\ R)$ и $K=K(f)$ — натуральное число. Функции $f_{k,l}$, а вместе с ними и $f$ могут иметь в начале произвольную особенность. На пространстве $\overset{0}{T}{}^{\infty}_{\{0\}}(U_{R,0})$ определим оператор $\sigma_n$ по формуле

$$\sigma_n f(r,\theta)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}\frac{\sqrt{\pi}\,r^{\frac{1-n}{2}}}{2^{n/2+k-1}\,\Gamma(n/2+k)}S_{n/2+k-1}\left(r^{-k}f_{k,l}\right)Y_{k,l}(\theta), \tag{2.7.2}$$

где $S_\nu$ — операторы преобразования, определенные в п. 2.1, $f_{k,l}$ — коэффициенты разложения функции $f$ в ряд по сферическим полиномам $Y_{k,l}$. Введем другое представление оператора $\sigma_n$, которое не использует разложение по сферическим гармоникам. Подставляя (2.6.2) в (2.7.2), находим

$$\sigma_n f(r,\theta)=\int\limits_{\Theta}\sum_{k=0}^{K}\frac{\sqrt{\pi}\,r^{\frac{1-n}{2}}}{2^{n/2+k-1/2}\Gamma(n/2+k)}\times$$
$$\times S_{n/2+k-1}\left(r^{-k}f(r,\theta')\sum_{l=1}^{d_k}Y_{k,l}(\theta)\,Y_{k,l}(\theta')\right)d\theta'.$$

По теореме сложения сферических гармоник (см. [6, с. 235]) получаем

$$\sum_{l=1}^{d_k}Y_{k,l}(\theta)\,Y_{k,l}(\theta')=\frac{\Gamma(n/2-1)}{2\pi^{n/2}}(n/2+k-1)\,C_k^{n/2}(\gamma),$$

где $\gamma=(\theta,\theta')$ обозначает скалярное произведение векторов $\theta,\theta'\in\Theta$. Так как $|\theta|=|\theta'|=1$, то $\gamma$ — косинус угла между ними. Через $C_k^{\lambda}$ обозначены ультрасферические многочлены Гегенбауэра. Отсюда и из представления оператора $S_\nu$ по формуле (2.2.14) имеем

$$\sigma_n f(r,\theta)=\frac{\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2}}\int\limits_{\Theta}\sum_{k=0}^{K}\frac{2\sqrt{\pi}}{2^{n/2+k-1}\Gamma(n/2+k)}r^{\frac{1-n}{2}}\times$$
$$\times S_{n/2+k-1}\left(r^{-k}f(r,\theta')\right)(n/2+k-1)\,C_k^{n/2-1}(\gamma)\,d\theta'=$$
$$=\frac{-\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2}}r^{\frac{1-n}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^{\frac{1+n}{2}}\int\limits_{\Theta}2(n/2+k-1)\,C_k^{n/2-1}(\gamma)\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^1 t^{-\frac{n+3}{2}}P^0_{n/2+k-3/2}(t)\,f(r/t,\theta')\,dt\,d\theta'\right\}, \tag{2.7.3}$$

где $P^0_\nu$ — функция Лежандра первого рода. Дальнейшие выкладки зависят от четности или нечетности размерности $n$. Пусть сначала $n\geqslant 3$ является нечетным числом. Приведем некоторые известные

соотношения для полиномов Лежандра и Гегенбауэра, доказательство которых можно найти в [8, гл. 10].

При целых $p>0$ справедлива формула

$$\frac{\partial^p}{\partial\gamma^p} C_m^{\lambda}(\gamma)=\frac{2^p\Gamma(\lambda+p)}{\Gamma(\lambda)} C_{m-p}^{\lambda+p}(\gamma), \qquad (2.7.4)$$

полагая в которой $\lambda=1/2$; $m=k+(n-3)/2$; $p=(n-3)/2$ получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^{\frac{n-3}{2}} C_{n/2+k-3/2}^{1/2}(\gamma)=2^{\frac{n-3}{2}}\frac{\Gamma(n/2-1)}{\Gamma(1/2)} C_k^{n/2-1}(\gamma).$$

Поскольку $C_\nu^{1/2}\equiv P_\nu^0$, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^{\frac{n-3}{2}} P_{n/2+k-3/2}^0(\gamma)=2^{\frac{n-3}{2}}\frac{\Gamma(n/2-1)}{\sqrt{\pi}} C_k^{n/2-1}(\gamma).$$

Подставляя теперь в (2.7.3), найдем

$$\sigma_n f(r,\theta)=-2^{\frac{1+n}{2}}\pi^{\frac{1-n}{2}} r^{\frac{1-n}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\int_{\Theta} r^{\frac{1+n}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^{\frac{n-3}{2}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty} 2(n/2+k-1) P_{n/2+k-3/2}^0(\gamma)\int_0^1 t^{-\frac{n+3}{2}} P_{n/2+k-3/2}^0(t)\times$$

$$\times f(r/t,\theta')\,dt\,d\theta'=-2^{\frac{1+n}{2}}\pi^{\frac{1-n}{2}} r^{\frac{1-n}{2}}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial r}\int_{\Theta} r^{\frac{1+n}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\frac{n-3}{2}}\sum_{k=\frac{n-3}{2}}^{\infty}(2k+1) P_k^0(\gamma)\times$$

$$\times\int_0^1 t^{-\frac{n+3}{2}} P_k^0(t) f(r/t,\theta')\,dt\,d\theta', \qquad (2.7.5)$$

где была произведена замена переменной суммирования. Так как полином Лежандра $P_k^0$ имеет степень $k$, то $D_\gamma^{\frac{n-3}{2}} P_k^0(\gamma)\equiv 0$ при $k<(n-3)/2$. Следовательно, не изменяя значения последнего выражения, в последней сумме нижний предел суммирования можно положить равным нулю. Кроме того, функция $t^{-\frac{n+3}{2}} f(r/t,\theta')$ по переменной $t$ бесконечно дифференцируема при $0<t\leqslant 1$ и тождественно равна нулю в окрестности левого конца. Продолжая ее нулем на отрезок $[-1,0]$, мы получаем функцию класса $C^\infty[-1,1]$. Для любой

$g \in C^\infty [-1, 1]$ справедливо (см. [8, гл. 10]) разложение в ряд Фурье по полиномам Лежандра

$$g(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k^0(\gamma) \int_{-1}^{+1} g(t) P_k^0(t)\, dt.$$

Отсюда для нашего случая получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k^0(\gamma) \int_0^1 t^{-\frac{n+3}{2}} P_k^0(t) f(r/t, \theta')\, dt = \begin{cases} \gamma^{-\frac{n+3}{2}} f(r/t, \theta'), & \text{если } \gamma > 0, \\ 0, & \text{если } \gamma \leqslant 0. \end{cases}$$

Подставляя это выражение в (2.7.5), находим окончательное представление оператора $\sigma_n$ в случае нечетного $n$:

$$\sigma_n f(r, \theta) = -2^{-\frac{1+n}{2}} \pi^{\frac{1-n}{2}} r^{\frac{1-n}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \int_{(\theta, \theta') > 0} r^{\frac{1+n}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial \gamma}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[\gamma^{-\frac{n+3}{2}} f(r/t, \theta')\right] \Big|_{\gamma = (\theta, \theta')} d\theta'. \quad (2.7.6)$$

Проведем теперь аналогичные построения в случае четного $n$. Пусть сначала $h \geqslant 4$. Снова воспользуемся формулой (2.7.4), в которой на этот раз положим $\lambda = 1$, $p = n/2 - 2$, $m = n/2 - 2 + k$. Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma}\right)^{n/2-2} C^1_{n/2+k-2}(\gamma) = 2^{n/2-2}\, \Gamma(n/2-1)\, C^{n/2-1}(\gamma).$$

Так как $C^1_{n/2+k-2}$ является многочленом Чебышева второго рода, то (см. [8, с. 185]):

$$C^1_{n/2+k-1}(\gamma) = \frac{\sin[(n/2+k-1) \cdot \arccos \gamma]}{\sin(\arccos \gamma)}.$$

Отсюда

$$C^1_{n/2+k-1}(\gamma) = \frac{1}{n/2+k-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \cos[(n/2+k-1) \arccos \gamma].$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma}\right)^{n/2-1} \cos[(n/2+k-1) \cdot \arccos \gamma] =$$

$$= 2^{n/2-2}\, \Gamma(n/2-1)(n/2+k-1)\, C_k^{n/2-1}(\gamma).$$

Подставляя в формулу (2.7.3), находим

$$\sigma_n f(r, \theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{\frac{3-n}{2}} r^{\frac{1-n}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\Theta} r^{\frac{1+n}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^{n/2-1}\int_0^1 t^{-\frac{n+3}{2}} f(r/t,\theta')\sum_{k=0}^{\infty}\cos\left[(n/2+k-1)\times\right.$$

$$\left.\times\arccos\gamma\right]\cdot P^0_{n/2+k-3/2}(t)\,dt\,d\theta=$$

$$=-2^{\frac{2-n}{2}}\pi^{\frac{3-n}{2}}r^{\frac{1-n}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\int_{\Theta} r^{\frac{1+n}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^{n/2-1}\int_0^1 t^{-\frac{n+3}{2}}\times$$

$$\times f(r/t,\theta')\sum_{k=n/2-1}^{\infty}\cos\left[k\cdot\arccos\gamma\right]P^0_{k-1/2}(t)\,dt\,d\theta'. \quad (2.7.7)$$

Многочлен Чебышева первого рода $\cos(k\cdot\arccos\gamma)$ имеет степень $k$. Тогда $D^{n/2-1}\cos(k\cdot\arccos\gamma)\equiv 0$ при $0\leqslant k<n/2-1$. Имеет место формула (см. [6, с. 166]):

$$P^0_{-1/2}(t)+2\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\cdot\arccos\gamma)P^0_{k-1/2}(t)=$$

$$=\begin{cases}(2(\gamma-t))^{-1/2}, & \text{если } \gamma>t,\\ 0, & \text{если } -1<\gamma<t.\end{cases} \quad (2.7.8)$$

Учитывая предыдущие результаты, окончательно имеем

$$\sigma_n f(r,\theta)=-2^{-\frac{1+n}{2}}\pi^{-n/2}r^{\frac{1-n}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\int_{(\theta,\theta')>0} r^{\frac{1+n}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^{n/2-1}\int_0^{\gamma} t^{-\frac{n+3}{2}} f(r/t,\theta')(\gamma-t)^{-1/2}dt\,\Big|_{\gamma=(\theta,\theta')}d\theta'. \quad (2.7.9)$$

Последняя формула доказана для четных $n\geqslant 4$.

Метод доказательства, приведенный выше, для $n=2$ непосредственно не проходит. Но сама формула верна и при $n=2$. Для этого достаточно перейти к полярным координатам и провести соответствующие выкладки.

Доказательство формул (2.7.6), (2.7.9) не было вполне строгим, поскольку не обоснован переход от конечных сумм к рядам. Такое обоснование нетрудно сделать, используя обычные факты о разложении функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра и Чебышева.

Определим оператор $\beta_n$ на пространстве $\overset{0}{T}{}^{\infty}_{\{0\}}(U_{R,0})$ по формуле

$$\beta_n f(r,\theta)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{dk}\frac{2^{n/2+k-1/2}\Gamma(n/2+k)}{\sqrt{\pi}}\cdot r^k\times$$

$$\times\mathcal{P}_{n/2+k-1}\left(r^{\frac{n-1}{2}}f_{k,l}\right)Y_{k,l}(\theta), \quad (2.7.10)$$

где $f_{k,l}$ определены выше, $\mathcal{P}_\nu$ — оператор преобразования из § 2.1.

Теорема 2.7.1. *Операторы* $\sigma_n$ *и* $\beta_n$ *отображают пространство* $\overset{0}{T}{}^{\infty}_{\{0\}}(U_{R,0})$ *на себя и являются взаимно обратными. Для функций* $f\in \overset{0}{T}{}^{\infty}_{\{0\}}(U_{R,0})$ *имеют место формулы*

$$\sigma_n\Delta f=r^{\frac{1-n}{2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^{\frac{n-1}{2}}\sigma_n f\right), \tag{2.7.11}$$

$$\Delta\beta_n f=\beta_n\left(r^{\frac{1-n}{2}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^{\frac{n-1}{2}}f\right)\right), \tag{2.7.12}$$

*где* $\Delta$ — *оператор Лапласа.*

Доказательство. Поскольку сферические гармоники $Y_{k,l}$ суть собственные функции оператора $\Delta_\theta$, то справедлива формула

$$\Delta f=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}+\frac{1}{r^2}\Delta_\theta\right)\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}f_{k,l}(r)\,Y_{k,l}(\theta)=$$

$$=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{k(k+n-2)}{r^2}\right]\left(f_{k,l}(r)\,Y_{k,l}(\theta)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}r^kB_{n/2+k-1}\left(r^{-k}f_{k,l}\right)Y_{k,l}(\theta),$$

где $B_\nu$, как обычно, обозначим оператор Бесселя, действующий по радиальной переменной. Подставляя это выражение в (2.7.2), находим

$$\sigma_n\Delta f=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{d_k}\frac{\sqrt{\pi}\,r^{\frac{1-n}{2}}}{2^{n/2+k-1/2}\Gamma(n/2+k)}S_{n/2+k-1}\,B_{n/2+k-1}\left(r^{-k}f_{k,l}\right)Y_{k,l}(\theta).$$

По теореме 2.2.2 имеем $S_\nu B_\nu=D_r^2S_\nu$; последнее приводит к формуле 2.7.12. Второе соотношение есть следствие первого. Теорема 2.7.1 позволяет трактовать операторы $\sigma_n$ и $\beta_n$ как операторы преобразования, преобразующие многомерный оператор Лапласа $\Delta$ в обыкновенный дифференциальный оператор вида $r^{\frac{1-n}{2}}D_r^2r^{\frac{n-1}{2}}$. Операторы $r^{\frac{n-1}{2}}\sigma_n$ и $\beta_nr^{\frac{1-n}{2}}$ преобразуют $\Delta$ в $D_r^2$.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Метод операторов преобразования своим широким применением, по-видимому, обязан работам Ж. Дельсарта [31], Ж.-Л. Лионса [139], Б. М. Левитана [131] и других. Впоследствии операторы Сонина и Пуассона нашли широкое применение в теории сингулярных гиперболических уравнений типа Эйлера—Пуассона—Дарбу (см., например, Ж.-Л. Лионс [138], Р. Кэррол, Р. Шоуолтер [126]). В последнее время ряд важных результатов в этом направлении для гиперболических уравнений получен И. А. Киприяновым, Л. А. Ивановым [95], [96]. Отдельные элементы этого метода в связи с применением метода сферических средних использовались еще при изучении

задачи Коши для классического волнового уравнения (см., например, монографию Р. Куранта [124]]). В теории обобщенных аналитических функций соответствующие операторы преобразования применялись Г. Н. Положим [153]. В эллиптическом случае М. И. Ключанцев в работах [114], [115] применял построенные им операторы преобразования типа интегралов дробного порядка к изучению некоторых сингулярных краевых задач. Для другого класса эллиптических сингулярных уравнений операторы преобразования применялись в [178], где изучены операторы преобразования, соответствующие дифференциальному оператору Лежандра.

Применение операторов преобразования в задачах уравнений математической физики продолжается и по сей день. Сошлемся, например, на работу [140], где с помощью операторов преобразования устанавливается связь между решениями задачи Коши уравнения Дарбу и линейного гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

В другой ситуации метод операторов преобразования был использован в спектральной теории одномерных уравнений Шредингера. Мы отсылаем к монографиям В. А. Марченко [147], К. Шадана, П. Сабатье [174] и имеющейся там библиографии.

Насколько нам известно, проблема построения операторов преобразования в многомерном случае остается открытой.

В рассматриваемой нами ситуации применяются операторы преобразования, построенные В. В. Катраховым [55], [57], [53] в одномерном и многомерном случаях. В многомерном случае операторы преобразования, по-видимому, ранее не рассматривались, хотя такие операторы тесно связаны с преобразованием Радона (см. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. Я. Виленкин [23], С. Хелгасон [172]). При построении операторов преобразования им были использованы операторы, сопряженные к классическим операторам Сонина и Пуассона, а также лиувиллевские операторы, подробно изученные П. И. Лизоркиным [136], и некоторые другие операторы, занимающие промежуточное положение между лиувиллевскими операторами и бесселевыми потенциалами, которые наследуют положительные свойства тех и других. При этом широко использовалась теория специальных функций Эйлера, Бесселя, Ганкеля, Лежандра, Гегенбауэра, Гаусса, Чебышева и другие функции.

Наконец, отметим, что некоторые свойства интегралов из § 2.1 и 2.2 в простейших ситуациях рассматривались ранее Г. Кобером [117] и А. Эрдеи [177].

При изучении операторов преобразования, связанных с классическим дифференциальным оператором Бесселя, С. М. Ситник [160], [161] применил преобразование Меллина, а также теорему Бохнера об общем виде унитарных операторов. Для построения операторов преобразования, связанных с одномерным оператором Шредингера с сингулярным потенциалом, в связи с возникающим гиперболическим уравнением применялся метод функций Римана. Во всех случаях используется теория высших трансцендентных функций Бесселя, Лежандра, Гаусса. Ими же методом операторов преобразования была изучена краевая задача для многомерного стационарного уравнения Шредингера и скорость убывания решений уравнения Шредингера с ограниченным потенциалом.

## ГЛАВА III

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В § 3.1 дается для ограниченной области $\Omega^+$ определение функционального пространства $H^s_{\nu,+}$, введенного ранее Киприяновым И. А. Доказывается теорема о вложении пространства $H^s_{\nu,+}(\Omega^+)$ в пространство $C^l_+(\bar{\Omega}_+)$ при $0 \leqslant l < s - \frac{n+1}{2} - \nu$, где $\nu$ — вещественный параметр. Приводится два следствия.

В § 3.2 вводятся и изучаются с помощью операторов преобразования $S_{\nu,e}$ и $\mathcal{P}_{\nu,e}$ (см. § 2.4, пространства $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, где $\mathbb{R}^{n+1}_+$ — полупространство $y > 0$ $(n+1)$-мерного евклидова пространства точек $x = (x', y)$, $x' \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$, параметр $\nu$ — комплексный. Показывается, что элементами пространства $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ являются обычные функции, которые в каждом слое $0 < a < y < b < \infty$ принадлежат классу Соболева $H^s$. Здесь же доказывается непрерывность вложения $H^{s'}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+) \subset H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ при $s' > s$ и рассмотрены некоторые вопросы, связанные с заменой оператора преобразования $\mathcal{P}_{\nu,e}$ на $\mathcal{P}_\nu$.

В § 3.3 найдены достаточные условия на функцию $a$, обеспечивающие непрерывность отображения $f \mapsto af$ в пространстве $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Найдена явная оценка нормы этого отображения в терминах производных функции $a$.

В § 3.4 вводятся весовые следы $\sigma_\nu(y)$, зависящие от комплексного параметра $\nu$. Отмечается, что пределы

$$\sigma_\nu B^k_y f|_{y=0} = \lim_{y \to +0} \sigma_\nu(y) B^k_y f(x', y),$$

$$\nu \in \{\operatorname{Re}\nu > 0\} \cup \{\nu = 0\},$$

$$y^{2\nu+1} D_y B^k_y f|_{y=0} = \lim_{y \to +0} y^{2\nu+1} D_y B^k_y f(x', y),$$

$$\operatorname{Re}\nu \geqslant 0,$$

для функций $f \in \overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ существуют в классическом смысле, причем они являются по $x'$ функциями класса $\overset{0}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Затем доказываемая прямая теорема о весовых следах. Всюду при доказательстве используются соответствующие операторы преобразования из гл. II.

В § 3.5 приводится специальное разбиение единицы, с помощью которого дается определение функционального пространства $H^s_\nu(\Omega)$,

где $\Omega$ — ограниченная область полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ с границей класса $C^{\infty}$; $\nu$ — комплексный параметр. В определении участвуют пространства $H^{s}_{\nu}(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$ из § 3.4.

Точнее, пространство $H^{s}_{\nu}(\Omega)$, где $s \geqslant 0$ $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$, определяется как множество функций, для которых функция $h_l f$ в локальной системе координат принадлежит пространству $H^{s}_{\nu}(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$, где $\{h_l\}$ — специальное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\Omega_l\}$ и удовлетворяющее, кроме обычных условий: $h_l \in \overset{0}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$, $h_l(x)=0$ при $x \in \mathbb{R}^{n+1}_{+} \setminus \Omega_l$, $0 \leqslant h_l(x) \leqslant 1$, $h_0(x)+\ldots+h_{\bar{l}}(x)=1$ при $x \in \Omega$, еще тождеству $\mathcal{D}_y h_l(x)=0$ в каждой локальной системе координат в некоторой окрестности границы. Было показано [57], что для любого покрытия такие разбиения единицы существуют. Пространство $H^{s}_{\nu}(\Omega)$ является гильбертовым с нормой

$$\| f \|^2_{H^s_\nu(\Omega)} = \sum_{l=0}^{\bar{l}} \| \varkappa_l (h_l f) \|^2_{H^s_\nu(R^{n+1}_{+})},$$

где $\varkappa_l$, $l=1, 2, \ldots, \bar{l}$, — диффеоморфизмы класса $C^{\infty}$, отображающие соответствующие области $\Omega_l$ в области $\omega_l \subset \mathbb{R}^{n+1}$. При этом область $\Omega_l^{+} = \Omega_l \cap \Omega$ отображается в $\omega_l^{+} = \omega_l \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+}$, а $\Omega_l \cap \partial\Omega$ отображается в часть гиперплоскости $\omega_l \cap \{y=0\}$. Поскольку мы имеем дело с сингулярными операторами, то дополнительно предполагается, что отображение $\varkappa_l^{-1}\varkappa_{l'}$ в случае $\Omega_l \cap \Omega_{l'} \neq \varnothing$ оставляет инвариантными нормали к гиперплоскости $\{y=0\}$. Эти нормы при различных разбиениях единицы эквивалентны друг другу. При измельчении покрытия эквивалентность норм при фиксированных $s$ и $\nu$ также сохраняется. Доказана лемма об операторе сужения и что при вещественном $\nu \geqslant 0$ пространство $H^{s}_{\nu,+}$ является собственным подпространством пространства $H^{s}_{\nu}$.

В § 3.6 приведены аналоги теорем вложения § 3.2. Отличие заключается в полной непрерывности оператора вложения $H^{s'}_{\nu}(\Omega) \subset H^{s}_{\nu}(\Omega)$ при $s' > s$, обусловленной ограниченностью области. Здесь же показано, что оператор сужения на строго внутреннюю подобласть $\Omega'$ непрерывен из $H^{s}_{\nu}(\Omega)$ в $H^{s}(\Omega')$. Результаты § 3.2—3.6 используются в теории соответствующих краевых задач из гл. IV, а § 3.1 — в теории спектральных характеристик из гл. V.

## § 3.1. Пространства $H^{s}_{\nu,+}(\Omega^{+})$. Теоремы вложения

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ — полупространство точек $(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^{n}$, с положительной последней координатой $y$ евклидова $(n+1)$-мерного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\Omega^{+}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$, прилегающая к гиперплоскости $y=0$, с границей $\partial\Omega^{+}$. Обозначим через $\Gamma$ часть $\partial\Omega^{+}$, лежащую на гиперплоскости $y=0$. Через $C^{s}_{+}(\Omega^{+} \cup \Gamma)$, $s=0, 1, 2, \ldots, \infty$, обозначим множество $s$ раз непрерывно дифференцируемых в $\Omega^{+} \cup \Gamma$ функций, четных по последней переменной. Через $\overset{0}{C}{}^{s}_{+}(\Omega^{+} \cup \Gamma)$ обозначим подмножество из $C^{s}_{+}(\Omega^{+} \cup \Gamma)$ функций, имеющих носитель в $\Omega^{+} \cup \Gamma$. Обозначим через $H^{s}_{\nu,+}(\Omega^{+})$ пространство, введенное в [63]. Эти пространства определяются как замыкание

множества $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(\Omega^+\cup\Gamma)$ по норме

$$\|u\|^2_{H^s_{\nu,+}}=\int\limits_{\Omega^+}|u(x,y)|^2y^{2\nu+1}dx\,dy+$$
$$+\sum_{|\alpha|=s}\int\limits_{\Omega^+}\left|\mathscr{D}^{\alpha'}_x\frac{\partial^{\alpha_{n+1}}u(x,y)}{(y\partial y)^{\alpha_{n+1}}}\right|^2y^{2\nu+2\alpha_{n+1}+1}dx\,dy,\qquad(3.1.1)$$

где $\alpha=(\alpha',\alpha_{n+1})=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}$, $\nu$ — фиксированное положительное число.

Положим $H^0_{\nu,+}(\Omega^+)=L_{2,\nu}(\Omega^+)$, где $L_{2,\nu}$ — пространство функций, суммируемых с квадратом с весом $y^{2\nu+1}$. Введем в рассмотрение класс $H^s_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega^+)$ функций $u(x,y)$ таких, что $u(x,y)h(x,y)\in H^s_{\nu,+}(\Omega^+)$, где $h(x,y)\in\overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(\Omega^+\cup\Gamma)$ и $\frac{\partial}{\partial y}h(x,y)=0$ в некоторой окрестности $y=0$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1.1. *Пространство $H^s_{\nu,+}(\Omega^+)$ вложено алгебраически и топологически в пространство $C^l_+(\bar{\Omega}_+)$, снабженное обычной нормой при $0\leqslant l\leqslant s-\frac{n-1}{2}-\nu$.*

Доказательство. Для любой функции $f(x,y)\in\overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(\Omega^+\cup\Gamma)$ имеет место представление

$$f(x,y)=\left[(2\pi)^n2^{2\nu-1}\Gamma^2(\nu+1/2)\right]^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\hat{f}_\nu(\sigma,t)j_\nu(yt)\exp[-i(x,\sigma)]t^{2\nu+1}dt\,d\sigma,\qquad(3.1.2)$$

где $j_\nu$ — нормированная функция Бесселя, $\hat{f}_\nu$ — преобразование Фурье — Бесселя функции $f$ (см. § 1.5). Функция $\hat{f}_\nu$ гладкая и убывает на бесконечности быстрее любой степени $\frac{1}{\sqrt{|\sigma|^2+t^2}}$, функция $j_\nu$ ограничена вместе со всеми производными. Следовательно, в формуле (3.1.2) можно дифференцировать по параметру $(x,y)$ под знаком интеграла. Имеем

$$\mathscr{D}^\alpha_{(x,y)}f(x,y)=\frac{\partial^{|\alpha|}f(x,y)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}(y\partial y)^{\alpha_{n+1}}}=C_{n,\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\hat{f}_\nu(\sigma,t)j_\nu^{(\alpha_{n+1})}(yt)\times$$
$$\times\exp[-i(x,\sigma)](-ix)^{\alpha'}t^{2\alpha_{n+1}}t^{2\nu+1}dt\,d\sigma,\qquad(3.1.3)$$

где $j_\nu^{(\alpha_{n+1})}$ обозначает $\alpha_{n+1}$ производную функцию $j_\nu$. Из (3.1.3) по неравенству Коши — Буняковского получаем

$$|\mathscr{D}^\alpha_{(x,y)}f(x,y)|\leqslant c_1\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|\hat{f}_\nu(\sigma,t)|^2\left(1+\sum_{i=1}^n\sigma_i^{2s}+t^{2s}\right)\times\right.$$
$$\left.\times t^{2\nu+1}d\sigma\,dt\right\}^{1/2}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\left(1+\sum_{i=1}^n\sigma_i^{2s}+t^{2s}\right)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times|\sigma_1|^{2\alpha_1}\ldots|\sigma_n|^{2\alpha_n}|t|^{2\alpha_{n+1}}t^{2\nu+1}d\sigma\,dt\right\}^{1/2}=c_1J_1J_2.$$

Используя лемму 3.1.4 из работы [63], имеем $J_1 \leqslant c_2 \|f\|_{H^s_{\nu,+}}$. Второй сомножитель $J_2 = c_3 < +\infty$, если $2(|\alpha|+\nu-1/2+s) < -(n+1)$. Окончательно получаем

$$|\mathscr{D}^\alpha_{(x,y)} f(x, y)| \leqslant c_4 \|f\|_{H^s_{\nu,+}}.$$

Следствие 3.1.1. *Если функция* $f(x, y) \in H^s_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega^+)$ *и* $0 \leqslant l < s - \frac{n+1}{2} - \nu$, *то после переопределения ее на множестве меры нуль (если это необходимо)* $f(x, y) \in C^l_+(\Omega^+ \cup \Gamma)$.

Доказательство. Пусть $h(x, y) \in \overset{0}{C}{}^\infty_+(\Omega^+ \cup \Gamma)$ и $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$ в некоторой окрестности Γ. Тогда $hf \in H^s_\nu(\Omega^+)$ и в силу теоремы 3.1.1 имеем $hf \in \overset{0}{C}{}^l_+(\Omega^+ \cup \Gamma)$. Так как это справедливо для достаточно широкого класса функций $h(x, y)$, среди которых есть функции, тождественно равные единице в достаточно малой окрестности произвольной точки из $\Omega^+ \cup \Gamma$, то $u(x, y) \in C^l_+(\Omega^+ \cup \Gamma)$.

Следствие 3.1.2. *Если для любого положительного s функция* $f(x, y) \in H^s_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega^+)$, *то после изменения ее на множестве меры нуль* $f(x, y) \in C^\infty_+(\Omega^+ \cup \Gamma)$.

Для доказательства достаточно применить следствие 3.1.1. Уместно говорить и о классической гладкости функций из $H^s_{\nu,+}(\Omega^+)$ вне гиперплоскости. В этом случае проходят те же рассуждения, только необходимо воспользоваться оценкой $|j_\nu(t)| \leqslant Ct^{-\nu-1/2}$, $t > 0$.

## § 3.2. Определение пространства $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Внутренние теоремы вложения

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}$ — евклидово пространство точек $x = (x', y)$, где $x' \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$. Через $\mathbb{R}^{n+1}_+$ обозначаем полупространство $y > 0$, а через $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ — его замыкание. Мы будем использовать операторы преобразования $\mathscr{P}_{\nu,e}$ и $S_{\nu,e}$, которые были введены в § 2.4 и которые будут действовать по переменной $y$. Пусть $\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ является множеством бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ с компактным носителем в $\overline{\mathbb{R}^{n+1}}$. Через $\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ обозначим множество функций, допускающих представление в виде $f = \mathscr{P}_{\nu,e} g$, где $g \in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Для целых $s \geqslant 0$ на множестве $\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ вводим норму

$$\|f\|_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)} = \|S_{\nu,e} f\|_{H^s}. \tag{3.2.1}$$

Здесь и в дальнейшем через $H^s \equiv W^s_2$ обозначается пространство Соболева. Определение нормы в (3.2.1) корректно, так как $S_{\nu,e} = (\mathscr{P}_{\nu,e})^{-1}$, следовательно, $S_{\nu,e} f \in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}})$. Обозначим через $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ множество функций, определенных в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, которые в каждом слое $\mathbb{R}^{n+1}_{a,b} = \{x = (x', y)\colon x' \in \mathbb{R}^n,\ a < y < b\}$ при $0 < a < b < \infty$ принадлежат пространству $H^s(\mathbb{R}^{n+1}_{a,b})$, $s$ — целое. Система полунорм $\rho_{s,a,b}(f) = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_{a,b})}$ превращает его в пространство Фреше.

Лемма 3.2.1. *Пусть $s$ — четное и неотрицательное число. Пусть* $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$. *Тогда для любой функции* $f\in \overset{0}{C}{}^{\infty}_{\nu}(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$ *имеет место оценка*

$$\rho_{s,a,b}(f)\leqslant c\,\|f\|_{H^{s}_{\nu}(\mathbb{R}^{n+1}_{+})}, \tag{3.2.2}$$

*где* $0<a<b<\infty$ *и постоянная* $c>0$ *не зависит от* $f$.

Доказательство. По условию леммы функция $g=S_{\nu,e}f$ принадлежит $\overset{0}{C}{}^{\infty}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{+}})$ и $\mathscr{P}_{\nu,e}g=f$. Применим к $g$ оператор $\mathscr{P}_{\nu,e}$ по формуле (2.4.15) по переменной $y$

$$\mathscr{P}_{\nu,e}g(x',y)=c_\nu y^{-\nu}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H^{(1)}_{\nu}(y\eta)\eta^{\nu}(1-i\eta)^{1/2-\nu}F\Pi g(x',\eta)\,d\eta, \tag{3.2.3}$$

где $F$ — преобразование Фурье по последней переменной, $\Pi$ — оператор продолжения по Уитни из $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть сначала $s=0$. По неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\|\mathscr{P}_{\nu,e}g\|^{2}_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}_{a,b})}\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{a,b}}\int\limits_{|\eta|<1}|H^{(1)}_{\nu}(y\eta)\eta^{\nu}(1-i\eta)^{1/2-\nu}|^{2}d\eta\int\limits_{|\eta|<1}|F\Pi g|^{2}d\eta\,dx+$$

$$+c\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{a,b}}\left|\int\limits_{|\eta|>1}H^{(1)}_{\nu}(y\eta)\eta^{\nu}(1-i\eta)^{1/2-\nu}F\Pi g(x',\eta)\,d\eta\right|^{2}dx. \tag{3.2.4}$$

Первый внутренний интеграл справа в (3.2.4) ограничен, так как по асимптотическим формулам для $H^{(1)}_{\nu}$ (см. [8]) подынтегральная функция либо ограничена, либо имеет логарифмическую особенность. Поэтому, расширяя пределы интегрирования и используя равенство Парсеваля, мы оценим слагаемые величиной $c\|\Pi g\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}_{+})}$. Для оценки второго слагаемого нужно воспользоваться асимптотикой функции Ганкеля $H^{(1)}_{\nu}(z)$ при $|z|\to\infty$. Она имеет вид (см. [8], с. 98])

$$H^{(1)}_{\nu}(z)=\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\left[c_0+O(|z|^{-1})\right], \tag{3.2.5}$$

где $c_0$ — постоянная. По равенству Парсеваля получаем

$$\int\limits_{a}^{b}\left|\int\limits_{|\eta|>1}e^{iy\eta}(y\eta)^{-1/2}\eta^{\nu}(1-i\eta)^{1/2-\nu}F\Pi g(x',\eta)\,d\eta\right|^{2}dy\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F\Pi g|^{2}d\eta\leqslant c_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Pi g(x',y)|^{2}dy.$$

Таким образом, получаем нужную оценку выражения, соответствующего первому слагаемому из (3.2.5). Оценивая выражение, соответствующее остаточному члену, по неравенству Коши — Буняковского получим

$$\int\limits_{a}^{b}\left|\int\limits_{|\eta|>1}(y\eta)^{-1/2}\eta^{\nu}(1-i\eta)^{1/2-\nu}O(|y\eta|^{-1})F\Pi g(x',\eta)\,d\eta\right|^{2}dy\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{|\eta|>1}|y\eta|^{-2}d\eta\int\limits_{|\eta|>1}|F\Pi g|^{2}d\eta\,dy\leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Pi g(x',y)|^{2}dy.$$

Так как $\|\Pi g\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant c\|g\|_{L_2(\mathbb{R}_+^{n+1})}$, то неравенство (3.2.2) при $s=0$ установлено.

Рассмотрим случай четного $s$. Заметим, что

$$\rho_{s,a,b}^2(f) \leqslant \sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}\leqslant s} \|\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'}\mathscr{D}_y^{2\alpha_{n+1}}\|_{L_2(\mathbb{R}_{a,b}^{n+1})}^2 \leqslant c \sum_{|\alpha|+2\alpha_{n+1}\leqslant s} \|\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'}B_y^{\alpha_{n+1}}\|_{L_2(\mathbb{R}_{a,b}^{n+1})}^2.$$

Учитывая формулу для операторов преобразования $S_{\nu,e}B_y = \mathscr{D}_y^2 S_{\nu,e}$, получаем

$$\rho_{,a,b}(f) \leqslant c \sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}\leqslant s} \|S_{\nu,e}(\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'}B_y^{\alpha_{n+1}}f)\|_{L_2(\mathbb{R}_+^{n+1})}^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\|S_{\nu,e}f\|_{H^s(\mathbb{R}_+^{n+1})}^2 = c\|f\|_{H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})}^2.$$

Лемма доказана.

Пространство $\overset{0}{C}{}_\nu^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$, наделенное нормой (3.2.1), в силу леммы непрерывно вложено в полное пространство $H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Замыкая $\overset{0}{C}{}_\nu^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ по норме (3.2.1) при $s\geqslant 0$, $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$, мы получаем пространство, которое обозначается через $H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

С л е д с т в и е 3.2.1. *При $s\geqslant 0$, $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$ гильбертово пространство $H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$ непрерывно вложено в пространство Фреше $H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$.*

Л е м м а 3.2.2. *Пусть $s\geqslant 0$, $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$ и $0<a<b<\infty$. Пусть функция $f\in H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и ее носитель заключен в полосе $\mathbb{R}_{a,b}^{n+1}$. Тогда $f\in H^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и имеет место неравенство*

$$c'\|f\|_{H^s(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leqslant \|f\|_{H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leqslant c''\|f\|_{H^s(\mathbb{R}_+^{n+1})}, \tag{3.2.6}$$

*где постоянные $c'$ и $c''$ не зависят от $f$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принадлежность $f$ пространству $H^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$, а также левая часть неравенства (3.2.6) установлены, по существу, при доказательстве леммы 3.2.1. Докажем справедливость правой части неравенства (3.2.6).

Имеем

$$S_{\nu,e} = J_{\nu-1/2,e}S_\nu, \tag{3.2.7}$$

где

$$J_{\nu-1/2,e}f(x',y) = f(x',y) + \left(\frac{1}{2}-\nu\right)\int_y^\infty f(x',t)\,\Phi\left(\nu+\frac{1}{2},\ 2;\ y-t\right)dt, \tag{3.2.8}$$

$$S_\nu f(x',y) = c_\nu\Big[y^{\nu+1/2}f(x',y) - \int_y^\infty t^{\nu+1/2}f(x',t)\frac{\partial}{\partial y}P_{\nu-1/2}^0(y/t)\,dt\Big], \tag{3.2.9}$$

причем $\Phi$ — вырожденная гипергеометрическая функция (см. гл. II, § 2), а $P_\mu^0$ — функция Лежандра первого рода. Ядра двух последних интегральных операторов представляют собой гладкие функции. Поэтому, поскольку $f(x',y)=0$ при $y<a$ и при $y>b$, то норма функции $S_{\nu,e}f$ в пространстве $H^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$ оценивается через норму функции $f$ в том же пространстве.

Введем в рассмотрение пространство $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})$ для слоя $\mathbb{R}^{n+1}_{0,b}$, $0<b<\infty$, как замыкание по норме (3.2.1) множества всех функций из $\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, носители которых содержатся в $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{0,b}}$.

Лемма 3.2.3. *Пусть* $s\geqslant 0$, $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$ *и* $0<b<\infty$. *Тогда норма* (3.2.1) *и норма*

$$\|f\|_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})}\equiv\|S_\nu f\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})} \tag{3.2.10}$$

*на пространстве* $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})$ *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $f\in\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ и $\operatorname{supp} f\in\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{0,b}}$. По определению это означает, что $S_{\nu,e}f\in\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Но тогда и функция $S_\nu f=J_{1/2-\nu,e}S_{\nu,e}f\in\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Последнее нетрудно получить из (3.2.7) и (3.2.8).

Заметим, что формула (3.2.8) верна при всех комплексных $\nu$. Операторы $J_{\mu,e}$ и $J_{-\mu,e}$ взаимно обратны на пространстве $\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Кроме того, из гладкости $\Phi$ следует оценка

$$c'\|J_{\mu,e}g\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant\|g\|_{H^s(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})}\leqslant c''\|J_{\mu,e}g\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)},$$

которая справедлива для $g\in\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ таких, что $\operatorname{supp} g\subset\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{0,b}}$. Постоянные $c'$ и $c''$ зависят от $b$, но не зависят от $g$. Таким образом, эквивалентность норм (3.2.1) и (3.2.10) доказана на плотном множестве $f\in\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\operatorname{supp} f\subset\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{0,b}}$. Лемма доказана.

Замечание. Эквивалентность норм (3.2.1) и (3.2.10) для пространства $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})$ доказана в случае конечного $b$. При $b=\infty$ это уже не имеет места. Можно показать, что норма (3.2.10) при $b=\infty$ подчинена норме (3.2.1). Поэтому, если в определении $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ заменить норму (3.2.1) на норму (3.2.10), то получим более широкое пространство, которое оказывается не вложенным в $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Это и послужило причиной использования нормы (3.2.1), порожденной оператором преобразования $S_{\nu,e}$, а не оператором $S_\nu$.

Установим связь построенных пространств и функциональных пространств, введенных И. А. Киприяновым [63].

Пусть $\mathscr{F}$ есть $(n+1)$-мерное преобразование Фурье:

$$\mathscr{F}f(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x',y)e^{-\imath(s',x')-\imath y\eta}\,dx,$$

где $\xi=(\xi',\eta)$, $\xi'\in\mathbb{R}^n$, $(x',\xi')=\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n$. Через $F_\nu$ обозначим преобразование Фурье — Бесселя (или Фурье — Ганкеля; см. гл. I)

$$F_\nu f(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} f(x',y)e^{-\imath(\xi',x')}j_\nu(y\eta)y^{2\nu+1}dx'\,dy.$$

Пространство $H^s_{\nu,+}(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})$, $s\geqslant 0$, $\nu\geqslant -1/2$, определяется (см. [63]) как замыкание множества четных функций $f\in\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, для которых $\operatorname{supp} f\subset\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{0,b}}$ (множество таких функций обозначалось выше через $\overset{0}{C}{}^\infty_+(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{0,b}})$) по норме

$$\|f\|^2_{H^s_{\nu,+}(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})}=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|F_\nu f(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\eta^{2\nu+1}\,d\xi. \tag{3.2.11}$$

Многократно применяя лемму 2.5.1, приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.2.4. *Пусть четное* $s \geqslant 0$ *и вещественное* $\nu \geqslant 0$. *Тогда пространство* $H^s_{\nu,+}(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})$ *непрерывно вложено в* $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})$. *При* $\nu \neq 1, 3, 5, \ldots$ *пространство* $H^s_{\nu,+}(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})$ *образует собственное подпространство пространства* $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})$, *причем индуцированная и собственная норма на* $H^s_{\nu,+}(\mathbb{R}^{n+1}_{0,b})$ *эквивалентны.*

Отметим теперь внутренние теоремы вложения для введенных пространств $H^s_\nu$.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\nu \geqslant 0$ *и* $s' > s > 0$. *Тогда пространство* $H^{s'}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *непрерывно вложено в* $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, *и справедливо соответствующее неравенство между нормами.*

Это утверждение есть прямое следствие определения пространств $H^s_\nu$ и теорем вложения пространств $H^s$.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\nu \geqslant 0$ *и* $s' > s > 0$. *Пусть* $\{f_j\}$ — *ограниченная последовательность функций из* $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, *причем* $\mathrm{supp}\, f_j \subset K$, *где* $K$ — *ограниченный компакт в* $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. *Тогда существует подпоследовательность, сходящаяся по норме пространства* $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Доказательство. Можно построить последовательность функций $\varphi_j(x) \in \overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ таких, что $\mathrm{supp}\,\varphi_j \subset K'$ и $\|f_j - \varphi_j\|_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \to 0$ при $j \to \infty$. Здесь $K'$ — некоторый компакт в $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. Тогда последовательность норм $\|\varphi_j\|_{H^{s'}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)} = \|S_{\nu,e}\varphi_j\|_{H^{s'}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$ ограничена. По теоремам о полной непрерывности вложения пространств $H^s$ (см. [151]) найдется функция $g \in H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, к которой сходится некоторая подпоследовательность $S_{\nu,e}\varphi_{jk}$. Заметим, что функция $S_{\nu,e}\varphi_{jk}$ рассматривается как элемент $H^s(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ на всем $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Значит, она фундаментальна в $H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, а тогда фундаментальна и последовательность $f_{jk}$. В силу полноты пространства $H^s_\nu$ эта подпоследовательность будет сходящейся. Теорема доказана.

## § 3.3. Мультипликаторы

В этом параграфе мы приводим некоторые результаты о мультипликаторах. Выясняются достаточные условия на функцию $a(x', y) = a(x)$, при которых отображение $f \mapsto af$ будет непрерывным в пространстве $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, и даются оценки нормы этого отображения.

Лемма 3.3.1. *Пусть* $a(x) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ *и выполнено условие*

$$\mathscr{D}^k_y a(x) = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.3.1}$$

*Тогда при* $\mathrm{Re}\,\nu \geqslant 0$ *функция* $af$ *принадлежит* $\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, *если* $f \in \overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Доказательство. Покажем, что если $g \in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, то функция $S_{\nu,e}(a\mathscr{P}_{\nu,e}g)$ принадлежит тому же классу. Так как $S_{\nu,e} = I_e^{1/2-\nu} S_\nu^{\nu-1/2}$ и $\mathscr{P}_{\nu,e} = \mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu} I_e^{\nu-1/2}$, операторы $I^\mu_e$ отображают $\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ на себя при любых комплексных $\mu$, то достаточно показать, что $S_\nu^{\nu-1/2}(a\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu} g) \in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Из определения опера-

торов преобразования $S_\nu^{\nu-1/2}$ и $\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}$ при $0 \leqslant \operatorname{Re}\nu < N+1/2$, где $N$ — натуральное число, получаем

$$S_\nu^{\nu-1/2}\left(a\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}f\right)(x', y) = \frac{(-1)^{N+1}2^{1-N}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(N-\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^\infty (t^2-y^2)^{\nu-1/2}\times$$

$$\times a(x', t)\,t\int\limits_t^\infty (\tau^2-t^2)^{N-\nu-1/2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\tau\partial\tau}\right)^{N-1}\frac{g(x', \tau)}{\tau}\,d\tau\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^{N+1}2^{1-N}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(N-\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^\infty \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\tau\partial\tau}\right)^{N-1}\frac{g(x', \tau)}{\tau}\right]\times$$

$$\times\int\limits_y^\tau (t^2-y^2)^{\nu-1/2}\,t\,(\tau^2-t^2)^{N-\nu-1/2}\,a(x', t)\,dt\,d\tau.$$

Во внутреннем интеграле справа сделаем замену переменной по формуле $t = \sqrt{y^2+z(\tau^2-y^2)}$. Тогда

$$\int\limits_y^\tau (t^2-y^2)^{\nu-1/2}\,t\,(\tau^2-t^2)^{N-\nu-1/2}\,a(x', t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}(\tau^2-y^2)^N\int\limits_0^1 z^{\nu-1/2}(1-z)^{N-\nu-1/2}\,a\left(x', \sqrt{y^2+z(\tau^2-y^2)}\right)dz.$$

Интегрированием по частям находим

$$S_\nu^{1/2-\nu}\left(a\mathscr{P}_\nu^{\nu-1/2}g\right)(x', y) = \frac{-1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(N-\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^\infty g(x', \tau)\left(\frac{\partial}{\partial\tau^2}\right)^N\times$$

$$\times\left[(\tau^2-y^2)^N\int\limits_0^1 z^{\nu-1/2}(1-z)^{N-\nu-1/2}\,a\left(x', \sqrt{y^2+z(\tau^2-y^2)}\right)\right]dz\,d\tau =$$

$$= \frac{-1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(N-\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^\infty g(x', \tau)\int\limits_0^1\sum_{k=0}^N 2^{k-N}\binom{N}{k}\frac{N!}{(N-k)!}\times$$

$$\times(\tau^2-y^2)^{N-k}\left(\frac{\partial}{\lambda\partial\lambda}\right)^{N-k}a(x', \lambda)\Bigg|_{\lambda=\sqrt{y^2+z(\tau^2-y^2)}}dz\,d\tau,$$

где $\binom{N}{k}$ — биномиальные коэффициенты.

Дифференцируя по параметру $y$, получаем

$$S_\nu^{1/2-\nu}\left(a\mathscr{P}_\nu^{\nu-1/2}g\right)(x',y)=$$
$$=a(x',y)g(x',y)+\int\limits_y^\infty g(x',\tau)a_\nu(x',y\tau)\,d\tau, \qquad (3.3.2)$$

где положено

$$a_\nu(x',y,\tau)=\frac{-1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(N-\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{2^{k-N}N!}{(N-k)!}(\tau^2-y^2)^{N-k}\times$$
$$\times\int\limits_0^1 z^{N+\nu-k+1/2}(1-z)^{N-\nu-1/2}\left(\frac{\partial}{\lambda\partial\lambda}\right)^{N-k}a(x',\lambda)\Big|_{\lambda=\sqrt{y^2+z(\tau^2-y^2)}}dz. \qquad (3.3.3)$$

Из (3.3.3) и из условия (3.3.1) следует, что функция $a_\nu(x',y,\tau)$ бесконечно дифференцируема при $x'\in\mathbb{R}^n$ и $y,\tau\geqslant 0$. Поэтому левая часть формулы (3.3.2) также бесконечно дифференцируема и финитна. Лемма доказана.

На функцию $a(x)$ наложим некоторые дополнительные ограничения. Пусть для некоторых $R<\infty$

$$\mathscr{D}_y a(x',y)=0, \qquad y\geqslant R, \qquad (3.3.4)$$

и при всех мультииндексах $\alpha$

$$\sup\left|\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'}\left(\frac{1}{y}\mathscr{D}_y\right)^{\alpha_{n+1}}a(x)\right|=M^{\alpha',\alpha_{n+1}}=M^\alpha<\infty. \qquad (3.3.5)$$

Уточним при этих условиях некоторые свойства $a_\nu(x',y,\tau)$. Справедлива оценка

$$\left|\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'}\left(\frac{\partial}{y\partial y}\right)^{e}\left(\frac{1}{\tau}\mathscr{D}_\tau\right)^{m}a_\nu(x',y,\tau)\right|\leqslant$$
$$\leqslant c(1+\tau)^{-2\operatorname{Re}\nu-1-m}\max_{k\leqslant N+l+m+1}M^{\alpha' k}, \qquad (3.3.6)$$

где постоянная $c$ не зависит от $x'$, $y$, $\tau$ и функции $a$. В самом деле, в правую часть (3.3.3) входит не сама функция $a$, а только производные от нее по последней переменной. Тогда из (3.3.4) имеем

$$a_\nu(x',y,\tau)=0, \qquad \tau\geqslant y\geqslant R. \qquad (3.3.7)$$

Следовательно, оценка (3.3.6) тем более справедлива при $\tau\geqslant y\geqslant R$. Оценка (3.3.6) справедлива и при $0\leqslant y\leqslant\tau\leqslant R$.

Пусть теперь $\tau>R>y$; тогда вследствие (3.3.4) имеем

$$\left|\int\limits_0^1 z^{\nu+N-k-1/2}(1-z)^{N-\nu-1/2}\left(\frac{\partial}{\lambda\partial\lambda}\right)^{N-k}a(x',\lambda)\Big|_{\lambda=\sqrt{y^2+z(\tau^2-y^2)}}dz\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^{(R^2-y^2)/(\tau^2-y^2)} z^{\nu+N-k-1/2}(1-z)^{N-\nu-1/2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\lambda\partial\lambda}\right)^{N-k} a(x',\lambda)\Big|_{\lambda=\sqrt{y^2+(\tau^2-y^2)z}}\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\left|\nu+N-k+\frac{1}{2}\right|}\left(\frac{R^2-y^2}{\tau^2-y^2}\right)^{\mathrm{Re}\,\nu+N-k+1/2}\sup_{y\geqslant 0}\left|\left(\frac{\partial}{y\partial y}\right)^{N-k} a(x',y)\right|.$$

Это соотношение и приводит к неравенству (3.3.6). Формула (3.3.3) позволяет получить аналогичное представление оператора $S_{\nu,e}(a\mathscr{P}_{\nu,e})$.

Так как $S_{\nu,e}=I_e^{1/2-\nu}S_\nu^{1/2-\nu}$, $\mathscr{P}_{\nu,e}=\mathscr{P}_\nu^{\nu-1/2}I_e^{\nu-1/2}$, то из (3.3.3) получаем

$$S_{\nu,e}(a\mathscr{P}_{\nu,e}g)=I_e^{1/2-\nu}(aI_e^{\nu-1/2}g)(x',y)+$$
$$+I_e^{1/2-\nu}\int\limits_y^\infty a_\nu(x',y,\tau)I_e^{\nu-1/2}g(x',\tau)\,d\tau, \qquad (3.3.8)$$

где функция $g\in \overset{0}{C^\infty}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$.

Первое слагаемое справа рассматривалось в лемме 2.3.3. Поэтому достаточно оценить второе слагаемое.

При $1/2<\mathrm{Re}\,\nu<N+1/2$ имеем

$$I_e^{1/2-\nu}\int\limits_y^\infty I_e^{\nu-1/2}g(x',\tau)a_\nu(x',y,\tau)\,d\tau=$$
$$=(-1)^N e^y I^{1/2-\nu+N}\mathscr{D}_y^N\int\limits_y^\infty e^{-y}a_\nu(x',y,\tau)I_e^{\nu-1/2}g(x',\tau)\,d\tau=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k I_e^{3/2-\nu-k}\left\{\left[e^y\mathscr{D}_y^k(e^{-y}a_\nu(x',y,\tau))\right]\Big|_{\tau=y}I_e^{\nu-1/2}g(x',y)\right\}+$$
$$+(-1)^N I^{1/2-\nu+N}\int\limits_y^\infty e^y\mathscr{D}_y^N\left[e^{-y}a_\nu(x',y,\tau)\right]I_e^{\nu-1/2}g(x',y)\,d\tau. \qquad (3.3.9)$$

Из формулы (3.3.3) нетрудно увидеть, что функции

$$e^y\mathscr{D}_y^k(e^{-y}a_\nu(x',y,\tau))|_{\tau=y}, \qquad k=0,1,\ldots,N-1,$$

удовлетворяют всем условиям следствия 2.3.2 гл. II.

Поэтому

$$\left\|\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k I_e^{3/2-\nu+k}\left\{\left[e^y\mathscr{D}_y^k(e^{-y}a_\nu(x',y,\tau))\right]_{\tau=y}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times I^{\nu-1/2}g(x',y)\right\}\right\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant c\sum_{|\alpha'|\leqslant s}M^{\alpha',k}\|g\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}, \qquad (3.3.10)$$

где постоянная $c$ не зависит от функций $g$ и $a$.

Для оценки последнего интеграла справа (3.3.9) заметим, что операторы $I_e^{1/2-\nu+N}$ и $I_e^{\nu-1/2}$ принадлежат классу $L(H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+), H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+))$, так как $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-\nu+N\right)>0$ и $\operatorname{Re}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)>0$ (см. лемму 2.3.2). Оценка (3.3.6) показывает, что интегральный оператор

$$W\mapsto\int\limits_y^\infty W(x',\tau)e^y\mathscr{D}_y^N\left[e^{-y}a_\nu(x',y,\tau)\right]d\tau$$

также принадлежит классу $L(H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+), H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+))$ при любых $s$ и его норма не превосходит величины $c\sum\limits_{k\leqslant 3N+s+1, |\alpha'|\leqslant s} M^{\alpha',k}$, где $c$ не зависит от функции $a$.

Такие же оценки справедливы и в случае $0\leqslant\operatorname{Re}\nu\leqslant\frac{1}{2}$. Для их доказательства достаточно оценить норму второго слагаемого в (3.3.8). Интегрируя по частям, имеем

$$I_e^{1/2-\nu}\int\limits_y^\infty I_e^{-1/2+\nu}g(x',\tau)a_\nu(x',y,\tau)d\tau=$$
$$=I_e^{1/2-\nu}a_\nu(x',y,y)I_e^{\nu+1/2}g+I_e^{1/2-\nu}\int\limits_y^\infty e^{-\tau}\times$$
$$\times\mathscr{D}_\tau\left[e^\tau a_\nu(x',y,\tau)\right]I_e^{\nu+1/2}g(x',\tau)d\tau.$$

Из неравенства (3.3.6) теперь легко следует, что $H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)$—норма этого выражения не превосходит величины $c\sum\limits_{k\leqslant 4+s, |\alpha|\leqslant s} M^{\alpha',k}$, где постоянная $c>0$ не зависит от функции $a$. Таким образом, доказана

Теорема 3.3.1. *Пусть $a(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ и удовлетворяет условиям* (3.3.1), (3.3.4), (3.3.5). *Тогда для любых комплексных $\nu$ в полуплоскости* $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$, *любых целых $s\geqslant 0$ и любых $R>0$, не превосходящих некоторого числа $R_0>0$, оператор $S_{\nu,e}a\mathscr{P}_{\nu,e}$ непрерывно отображает $H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ в себя. Справедлива оценка*

$$\|S_{\nu,e}(a\mathscr{P}_{\nu,e}f)\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant c\,\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\sum_{\substack{|\alpha'|<s\\|\alpha_{n+1}|\leqslant 3N+s+1}} M^{\alpha',\alpha_{n+1}},\qquad(3.3.11)$$

*где $N$—наименьшее натуральное число, для которого* $\operatorname{Re}\nu<N+\frac{1}{2}$. *Постоянная $c$ зависит от $\nu$, $n$, $s$, $R_0$, но не зависит от функций $a$ и $f$, а также и от $R$.*

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы справедлива оценка*

$$\|af\|_{H_\nu^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant c\sum_{\substack{|\alpha'|\leqslant s\\\alpha_{n+1}\leqslant 3N+s+1}} M^{\alpha',\alpha_{n+1}}\,\|f\|_{H_\nu^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}.\qquad(3.3.12)$$

Следствие 3.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы и пусть*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{n+1}_+}\left|\mathscr{D}_{x'}^{\alpha'}\left(\frac{1}{y}\mathscr{D}_y^{\alpha_{n+1}}\frac{a(x',y)}{y}\right)\right|=\tilde{M}^{\alpha',\alpha_{n+1}}<\infty.$$

*Тогда справедлива оценка*

$$\| a\mathscr{D}_y f \|_{H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leqslant c \sum_{\substack{|\alpha'| \leqslant s \\ \alpha_{n+1} \leqslant 3N+s+1}} \tilde{M}^{\alpha', \alpha_{n+1}} \| f \|_{H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})}. \qquad (3.3.13)$$

Доказательство. Из определения оператора преобразования (см. (2.1.6), (2.1.7)) следует формула

$$y\mathscr{D}_y \mathscr{P}_\nu^{\nu-1/2} = \mathscr{P}_\nu^{\nu-1/2}(y\mathscr{D}_y - 2\nu).$$

В связи с этим по аналогии с (3.3.8) для $S_{\nu,e}f$ имеем

$$S_{\nu,e}(a\mathscr{D}_y \mathscr{P}_{\nu,e} g) = I_e^{1/2-\nu}\left[a\left(\mathscr{D}_y - \frac{2\nu}{y}\right) I_e^{\nu-1/2} g\right] +$$

$$+ I^{1/2-\nu}\int_y^\infty (\tau\mathscr{D}_\tau - 2\nu)\,\tilde{a}_\nu(x', y, \tau)\, I_e^{\nu-1/2} f(x', \tau)\, d\tau,$$

где функция $\tilde{a}_\nu$ определяется по формуле (3.3.3) с заменой в последней функции $a$ на функцию $y^{-1}a(x', y)$. После интегрирования по частям последняя формула приводится к виду

$$S_{\nu,e}(a\mathscr{D}_y \mathscr{P}_{\nu,e} f) = I_e^{1/2-\nu}\left[a I_e^{\nu-1/2}\mathscr{D}_y f\right] - 2\nu I_e^{1/2-\nu}\left(\frac{a}{y} I_e^{\nu-1/2} f\right) -$$

$$- 2\nu I_e^{1/2-\nu}\int_y^\infty I_e^{\nu-1/2} f(x', \tau)\,\tilde{a}_\nu(x', y, \tau)\, d\tau -$$

$$- I_e^{1/2-\nu}\left[y\tilde{a}_\nu(x', y, y) I_e^{\nu-1/2} f\right] -$$

$$- I_e^{1/2-\nu}\int_y^\infty \tau\tilde{a}_\nu(x', y, \tau)\, I_e^{\nu-1/2}\frac{\partial}{\partial\tau} f(x', \tau)\, d\tau.$$

Каждое слагаемое удовлетворяет нужным условиям для возможности применения схемы рассуждений из доказательства предыдущей теоремы. Отсюда и следует справедливость (3.3.13). Утверждение доказано.

## § 3.4. Весовые следы

Определим, как и раньше (см. § 2.5), весовую функцию $\sigma_\nu(y)$ по следующей формуле:

$$\sigma_\nu(y) = \begin{cases} y^{2\nu}, & \text{если } \operatorname{Re}\nu > 0, \\ -\dfrac{1}{\ln y}, & \text{если } \nu = 0, \\ 1, & \text{если } \operatorname{Re}\nu < 0. \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

В классическом смысле весовым $\sigma_\nu$-следом функции $f$ называется предел вида

$$\sigma_\nu f|_{y=0}=\lim_{y\to+0}\sigma_\nu(y)f(x',y)=\Psi(x'). \qquad (3.4.2)$$

Покажем, что у функции $f(x)\in \overset{0}{C}{}_\nu^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ существует $\sigma_\nu$-след и он принадлежит пространству $\overset{0}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $f\in \overset{0}{C}{}_\nu^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, то по определению этого пространства существует функция $g\in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ такая, что $f=\mathscr{P}_{\nu,e}g$. Тогда $g=S_{\nu,e}f$. В § 2.4 в одномерном случае была доказана формула

$$\lim_{y\to 0+}\sigma_\nu(y)\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}f_1(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\nu}f_1(0), & \text{если } \operatorname{Re}\nu>0,\\ f_1(0), & \text{если } \nu=0.\end{cases} \qquad (3.4.3)$$

Аналогичный результат остается верным и в многомерном случае. Используя формулу $\mathscr{P}_{\nu,e}=\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}I_e^{\nu-1/2}$, из (3.4.3) получаем

$$\sigma_\nu f|_{y=0}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\nu}I_e^{\nu-1/2}g(x',y)|_{y=0}, & \text{если } \operatorname{Re}\nu>0,\\ I_e^{-1/2}g(x',y)|_{y=0}, & \text{если } \nu=0.\end{cases} \qquad (3.4.4)$$

Таким образом, $\sigma_\nu f|_{y=0}\in \overset{0}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n)$, если $f\in \overset{0}{C}{}_\nu^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

В связи с формулой (3.4.4) изучим следы функций вида $I_e^\mu f$ в пространствах $H^s$. Эти результаты будут впоследствии использованы в теории краевых задач.

Пусть $g\in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ и пусть $\Pi g$ — продолжение ее по Уитни на все пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда для любого комплексного $\mu$ и натурального $k$ справедлива формула

$$\mathscr{D}_y^k I_e^\mu g(x',y)|_{y=0}=\mathscr{D}^k I_e^\mu \Pi g(x',y)|_{y=0}=\Psi_k(x'),$$

где $\Psi_k(x')\in \overset{0}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n)$. В образах Фурье последнее равенство примет следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-i\eta)^{-\mu}i^{-k}\eta^k\mathscr{F}\Pi g(\xi',\eta)\,d\eta=\mathscr{F}'\Psi_k(\xi'),$$

где $\mathscr{F}$ обозначает преобразование Фурье по всем $n+1$ переменным $(x',y)$, а $\mathscr{F}'$ обозначает преобразование Фурье по первым $n$ переменным $x'=(x_1,\dots,x_n)$.

По неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\|(1+|\xi'|^2)^s\mathscr{F}'\Psi_k(\xi')\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi'|^2)^s\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+\eta^2)^{-\operatorname{Re}\mu}\eta^{2k}}{(1+|\xi|^2)^{s'}}d\eta\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|^2)^{s'} |\mathscr{F}\Pi g(\xi)|^2 d\eta\, d\xi'. \quad (3.4.5)$$

Лемма 3.4.1. *Пусть* $s'>k-\mathrm{Re}\,\mu+\frac{1}{2}>0$. *Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\eta^2)^{-\mathrm{Re}\,\mu}\eta^{2k}}{(1+|\xi|^2)^{s'}} d\eta \leqslant c(1+|\xi'|^2)^{-s'+k-\mathrm{Re}\,\mu+1/2}, \quad (3.4.6)$$

*где постоянная* $c>0$ *не зависит от* $\xi' \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Разобьем интеграл из левой части неравенства (3.4.6) на два. Для первого из них имеем

$$\int_{|\eta|>1} \frac{(1+\eta^2)^{-\mathrm{Re}\,\mu}\eta^{2k}}{(1+|\xi|^2)^{s'}} d\eta \leqslant c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^{2k-2\mathrm{Re}\,\mu}}{(1+|\xi|^2)^{s'}} d\eta = c_2(1+|\xi'|^2)^{k-s'-\mathrm{Re}\,\mu+1/2}.$$

Второй интеграл допускает оценку

$$\int_{|\eta|<1} \frac{(1+\eta^2)^{-\mathrm{Re}\,\mu}\eta^{2k}}{(1+|\xi|^2)^{s'}} d\eta \leqslant c_3(1+|\xi'|^2)^{-s'}.$$

Лемма доказана.

Соединяя неравенства (3.4.5) и (3.4.6), получаем следующую оценку:

$$\|\Psi_k\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \int_{R^{n+1}} (1+|\xi'|^2)^{s-s'+k-\mathrm{Re}\,\mu+1/2}(1+|\xi|^2)^{s'} |\mathscr{F}\Pi g(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+|\xi|^2)^{s+k-\mathrm{Re}\,\mu+1/2} |\mathscr{F}\Pi g|^2 d\xi \leqslant c\, \|g\|_{H^{s+k-\mathrm{Re}\,\mu+1/2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.4.1. *Пусть* $s>k-\mathrm{Re}\,\mu+\frac{1}{2}$. *Тогда для любой функции* $g\in H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *на гиперплоскости* $y=0$ *существует след функции вида* $\mathscr{D}_y^k I_e^\mu g$, *который принадлежит пространству* $H^{s-k+\mathrm{Re}\,\mu-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$. *При этом справедлива оценка*

$$\|\mathscr{D}_y^k I_e^\mu g|_{y=0}\|_{H^{s-k+\mathrm{Re}\,\mu-1/2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\, \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}, \quad (3.4.7)$$

*где постоянная* $c$ *не зависит от функции* $g$.

Вернемся к изучению весовых следов. Пусть $f\in \overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Запишем формулу (3.4.3) для функции $B^k f$, которая также принадлежит $\overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Имеем, используя формулу $S_{\nu,e}B^k=\mathscr{D}_y^{2k}S_{\nu,e}$,

$$\sigma_\nu B^k f|_{y=0} = \begin{cases} \frac{1}{2\nu} I_e^{\nu-1/2} S_{\nu,e}(B^k f)|_{y=0}, & \text{если } \mathrm{Re}\,\nu>0, \\ I_e^{-1/2} S_{0,e}(B^k f)|_{y=0}, & \text{если } \nu=0, \end{cases} =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\nu}\mathscr{D}_y^{2k}I_e^{\nu-1/2}S_{\nu,e}f|_{y=0}, & \text{если } \operatorname{Re}\nu>0,\\ \mathscr{D}_y^{2k}I_e^{-1/2}S_{0,e}f|_{y=0}, & \text{если } \nu=0.\end{cases} \tag{3.4.8}$$

Соединяя (3.4.3) и (3.4.8) с теоремой 3.4.1 и определением пространства $H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$, приходим к следующей теореме о весовых следах.

Теорема 3.4.2. *Пусть* $\operatorname{Re}\nu>0$ *или* $\nu=0$, $s>2k-\operatorname{Re}\nu+1>0$. *Тогда отображение* $f\mapsto\sigma_\nu B^k f|_{y=0}$, *определяемое по формуле* (3.4.8) *для функции* $f\in \overset{0}{C}{}_\nu^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$, *расширяется по непрерывности до линейного ограниченного отображения пространства* $H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$ *в пространство* $H^{s-2k+\operatorname{Re}\nu-1}(\mathbb{R}^n)$. *Справедлива оценка*

$$\|\sigma_\nu B^k f|_{y=0}\|_{H^{s-2k+\operatorname{Re}\nu-1}(\mathbb{R}^n)}\leqslant c\|f\|_{H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})}, \tag{3.4.9}$$

*где постоянная* $c>0$ *не зависит от функции* $f$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая мнимых значений параметра $\nu$. Формула (3.4.3) здесь уже не имеет места. В самом деле, для любой функции $g\in\overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ при $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$ имеем (см. (2.3.3))

$$\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}g(x',y)=\frac{i}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+1)}y^{-\nu}\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_\nu^{(1)}(y\eta)\eta^\nu F\Pi g(x',\eta)d\eta. \tag{3.4.10}$$

Функция Ганкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ в случае $\operatorname{Re}\nu=0$ $\nu\neq0$, в окрестности $z=0$ имеет вид (см. [8])

$$H_\nu^{(1)}(z)=c'_\nu z^{-\nu}[1+O(1)]+c''_\nu z^\nu[1+O(1)],$$

где $c'_\nu$, $c''_\nu$ — вполне определенные постоянные. Функции $z^{-\nu}$, $z^\nu$ осциллируют вблизи начала координат:

$$z^{-\nu}=\cos(\mu\ln z)-i\sin(\mu\ln z),$$
$$z^\nu=\cos(\mu\ln z)+i\sin(\mu\ln z),\qquad \mu=-i\nu.$$

Поэтому не существует степенной функции $\varphi(z)$, для которой $\lim\limits_{z\to0}\varphi(z)H_\nu^{(1)}(z)=1$. Вследствие этого и у функции $\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}g(x',y)$, вообще говоря, не существует весового следа. Поэтому мы будем рассматривать весовой след не самой функции, а ее производной.

Воспользуемся следующей рекуррентной формулой для функции $H_\nu^{(1)}$ (см. [8, с. 20]):

$$\frac{\partial}{z\partial z}(z^{-\nu}H_\nu^{(1)}(z))=-z^{-\nu-1}H_{\nu+1}^{(1)}(z).$$

Тогда из (3.4.10) имеем

$$\frac{\partial}{y\partial y}\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}g(x',y)=\frac{-i}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+1)}y^{-\nu-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_{\nu+1}^{(1)}(y\eta)\eta^{\nu+1}F\Pi g(x',\eta)d\eta.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{y\partial y}\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}g(x',y)=-2(\nu+1)\mathscr{P}_{\nu+1}^{-1/2-\nu}g(x',y).$$

Отсюда и из (3.4.3) получаем

$$\lim_{y\to 0} y^{2\nu+1}\frac{\partial}{\partial y}\mathscr{P}_\nu^{1/2-\nu}g(x',y)=-g(x',0). \qquad (3.4.11)$$

Формула (3.4.11), справедливая при всех $\nu$ из полуплоскости $\operatorname{Re}\nu>0$, в том числе и для мнимых $\nu$, служит, как и (3.4.3), основой получения следующей теоремы о весовых следах:

Теорема 3.4.3. *Пусть* $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$ *и* $s>2k-\operatorname{Re}\nu+1>0$. *Тогда отображение* $f\mapsto y^{2\nu+1}\frac{\partial}{\partial y}B^k f|_{y=0}$, *определяемое по формуле*

$$y^{2\nu+1}\frac{\partial}{\partial y}B^k f|_{y=0}=-\mathscr{D}_y^{2k}I_e^{\nu-1/2}S_{\nu,e}f|_{y=0} \qquad (3.4.12)$$

*для функций* $f\in \overset{0}{C}{}_\nu^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$, *расширяется по непрерывности до ограниченного отображения пространства* $H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$ *в пространство* $H^{s-2k+\operatorname{Re}\nu-1}(\mathbb{R}^n)$. *При этом справедливо неравенство*

$$\left\|y^{2\nu+1}\frac{\partial}{\partial y}B^k f|_{y=0}\right\|_{H^{s-2k+\operatorname{Re}\nu-1}(\mathbb{R}^n)}\leqslant c\,\|f\|_{H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})},$$

*где постоянная* $c>0$ *не зависит от функции* $f$.

## § 3.5. Специальное разбиение единицы. Определение пространства $H_\nu^s(\Omega)$

Пусть $\Omega$ — ограниченная область полупространства $\mathbb{R}_+^{n+1}$ с границей класса $C^\infty$. Пусть область $\Omega_0$ расположена строго внутри $\Omega$, т. е. $\bar\Omega_0\subset\Omega$ или, что то же самое, $\bar\Omega_0\bigcap\partial\Omega\neq\varnothing$. Пусть области $\Omega_l$, $l=1, 2, \ldots, \bar l$, имеющие непустое пересечение с границей $\partial\Omega$, образуют покрытие области $\bar\Omega$. Положим $\Omega_l^+=\Omega_l\bigcap\Omega$, $l=1, 2, \ldots$ $\ldots, \bar l$. Пусть существуют диффеоморфизмы $\varkappa_l$ класса $C^\infty$, отображающие области $\Omega_l$, $l=1, 2, \ldots, \bar l$, в области $\omega_l$, расположенные в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. При этом через $\varkappa_0$ обозначается тождественное преобразование. Пусть область $\Omega_l^+$ отображается в $\omega_l^+=\omega\bigcap\mathbb{R}_+^{n+1}$, и часть границы $\Omega_l\bigcap\partial\Omega$ отображается в часть гиперплоскости $\omega_l\bigcap\{y=0\}$. Предполагается также, что если $\Omega_l\bigcap\Omega_{l'}\neq\varnothing$, то естественное отображение $\varkappa_{l'}\circ\varkappa_l^{-1}$ части $\varkappa_l(\Omega_l^+\bigcap\Omega_{l'}^+)$ области $\omega_l^+$ в часть $\varkappa_{l'}(\Omega_l^+\bigcap\Omega_{l'}^+)$ области $\omega_{l'}^+$ является невырожденным преобразованием с положительным якобианом, осуществляемым по формулам $x'=x'(\tilde x')$, $y=\tilde y$ в некоторой окрестности границы. Указанное покрытие области считается в дальнейшем фиксированным, а все другие необходимые покрытия будут получаться из него измельчением.

Лемма 3.5.1. *Существуют функции* $h_l\in\overset{0}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, *обладающие следующими свойствами:*

1) $h_l(x)=0$, *если* $x\in\mathbb{R}^{n+1}\backslash\Omega_l$, $l=0, 1, \ldots, \bar l$,
2) $0\leqslant h_l(x)\leqslant 1$ *при всех* $x\in\mathbb{R}^{n+1}$,
3) $h_0(x)+h_1(x)+\ldots+h_{\bar l}(x)\equiv 1$ *при* $x\in\Omega$,
4) *при* $l=1, 2, \ldots, \bar l$ *в локальных координатах* $\mathscr{D}_y h_l(x)\equiv 0$ *в некоторой окрестности гиперплоскости* $y=0$.

Доказательство. Пусть $U_R(x)$ — открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса $R>0$. Пусть $\omega_{l,\varepsilon}=\{x\in\omega_l\colon\ |U_\varepsilon(x)\subset\omega_l\}$. Нетрудно видеть, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ области $\varkappa_l^{-1}\omega_{l,\varepsilon}$ образуют покрытие области $\bar{\Omega}$.

Пусть $\varepsilon>0$ таково, что области $\varkappa_l^{-1}\omega_{l,\varepsilon}$, $l=0, 1, \ldots, \bar{l}$ образуют покрытие области $\bar{\Omega}$. Рассмотрим какую-либо область $\omega_{l,\varepsilon}$. Обозначим через $K_\delta(x)$ открытый $(n+1)$-мерный куб с центром в точке $x$, с длиной ребра $2\delta$ и с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям. Поскольку каждая точка $x\in\omega_{l,\varepsilon}\bigcap\{y=0\}$ входит в $\omega_l$ вместе с шаром радиуса $\varepsilon$, то существует конечное покрытие ее кубами вида $K_{\varepsilon_p/2}(x^p)$, $p=1, \ldots, \bar{p}<\infty$, $\varepsilon_p>0$, с центром соответственно в точках $x^p\in\omega_{l,\varepsilon}\bigcap\{y=0\}$, причем такое, что $K_{\varepsilon_p}(x^p)\subset\omega_l$. Покроем оставшуюся часть области $\omega_{l,\varepsilon}$ кубами вида $K_{\varepsilon_p/2}(x^p)$, $p=\bar{p}+1, \ldots, \bar{\bar{p}}<\infty$, и такими, чтобы $K_{\varepsilon_p}(x^p)\subset\omega_l$ и чтобы $\bar{K}_{\varepsilon_p}(x^p)$ не имело общих точек с гиперплоскостью $\{y=0\}$.

Обозначим через $\varphi_\delta(t)$ функцию одной переменной $t$ такую, что $\varphi_\delta\in\overset{0}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\varphi_\delta(t)\geqslant 0$ при $t\in\mathbb{R}^1$, $\varphi_\delta(t)=1$ при $|t|\leqslant\delta$, $\varphi_\delta(t)=0$ при $|t|\geqslant 2\delta$. Введем теперь функцию $\psi_l(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n, y)$, по формуле

$$\psi_l(x)=\sum_{p=1}^{\bar{p}}\varphi_{\varepsilon_p}(y)\prod_{q=1}^{n}\varphi_{\varepsilon_p}(x_q-x_q^p)+\sum_{p=\bar{p}+1}^{\bar{\bar{p}}}\psi_{l,p}(x),$$

где $x_q^p$ означает $q$ — координату $x^p$, а через $\psi_{l,p}(x)$ обозначена функция, обладающая свойствами: $\psi_{l,p}\in\overset{0}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $\psi_{l,p}(x)\geqslant 0$ при $x\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_{l,p}(x)=1$ при $x\in K_{\varepsilon_p/2}(x^p)$, $\psi_{l,p}(x)=0$ при $x\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus K_{\varepsilon_p}(x^p)$, $p=\bar{p}+1, \ldots, \bar{\bar{p}}$. Доказательство существования функций $\varphi_\delta$ и $\psi_{l,p}$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, можно найти, например, в [150]. Тогда построенная функция $\psi_l(x)$ обладает свойствами: $\psi_l(x)\in\overset{0}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $\psi_l(x)\geqslant 0$ при $x\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_l(x)\geqslant 1$ при всех $x\in\omega_{l,\varepsilon}$ и $\operatorname{supp}\psi_l\subset\omega_l$. Нетрудно также заметить, что $\mathscr{D}_y\psi_l(x)\equiv 0$ при $|y|<\delta$, где $\delta$ — некоторое положительное число.

Искомые функции $h_l$ определяем по формуле

$$h_l(x)=\varkappa_l^{-1}\psi_l/\sum_{m=0}^{\bar{l}}\varkappa_l^{-1}\psi_m.$$

Проверка условий 1) — 4) не вызывает затруднений. Лемма доказана.

Мы будем говорить, что набор функций $\{h_l\}$ образует разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\Omega_l\}$, если выполнены условия 1) — 4).

Определение 3.5.1. *Пространство* $H_\nu^s(\Omega)$, $s\geqslant 0$ $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$ *определяется как множество функций $f$, заданных в области $\Omega$, таких, что функции $\varkappa_l(h_l f)$ принадлежат* $H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

Пространство $H_\nu^s(\Omega)$ становится гильбертовым по норме

$$\|f\|^2_{H_\nu^s(\Omega)}=\sum_{l=0}^{\bar{l}}\|\varkappa_l(h_l f)\|^2_{H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})}, \tag{3.5.1}$$

где $\{h_l\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\Omega_l\}$.

Покажем, что нормы (3.5.1) при различных выборах разбиений единицы эквивалентны. Установим даже более общий результат.

Пусть $\{\Omega'_{l'}\}$ — другое покрытие области $\bar{\Omega}$. Пусть для каждого $l'=0, 1, \ldots, \bar{l}'$ найдется такое $l=0, \ldots, \bar{l}$, что $\Omega'_{l'}\subset\Omega_l$. При выполнении этого условия покрытие $\{\Omega'_{l'}\}$ будем называть измельчением покрытия $\{\Omega_l\}$. Обозначим через $\{h'_{l'}\}$ разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\Omega'_{l'}\}$. Тогда можно ввести следующую норму:

$$\|f\|^2_{H^s_\nu(\Omega)}=\sum_{l'=0}^{\bar{l}'}\|\varkappa'_{l'}(h'_{l'}f)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}, \tag{3.5.2}$$

где отображение $\varkappa'_{l'}=\varkappa_{l'}$, $l=l(l')$, причем $l$ выбирается так, чтобы $\operatorname{supp} h'_{l'}\subset\Omega_l$. Если таких $l$ несколько, то выбирается любое из них (из свойств отображения $\varkappa_l$ следует, что соответствующие слагаемые будут эквивалентными нормами). Оценим одно из слагаемых справа в (3.5.2). Имеем

$$\|\varkappa'_{l'}(h'_{l'}f)\|_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)}=\left\|\sum_{l=0}^{\bar{l}}\varkappa'_{l'}(h'_{l'}h_lf)\right\|_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant\sum_{l=0}^{\bar{l}}\|\varkappa'_{l'}(h'_{l'}h_lf)\|_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant$$

$$\leqslant c_1\sum_{l=0}^{\bar{l}}\|\varkappa'_{l'}(h'_{l'}h_lf)\|_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant c_2\sum_{l=0}^{\bar{l}}\|\varkappa_l(h_lf)\|_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)}.$$

В предпоследнем неравенстве мы используем свойства отображения $\varkappa'_{l'}\varkappa_l^{-1}$ (см. начало параграфа), а в последнем неравенстве пользуемся результатами о мультипликаторах § 3.3, где и потребовалось свойство 4) функции $h'_{l'}$. Обратная оценка доказывается аналогично. Эквивалентность норм доказана.

Рассмотрим еще один вопрос, касающийся структуры пространств $H^s_\nu(\Omega)$. Пусть $f\in H^s_\nu(\Omega)$, а функция $a\in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega)$. Тогда из результатов § 3.2 следует, что $af$ принадлежит $H^s(\Omega)$. Более того,

$$c\|af\|_{H^s(\Omega)}\leqslant\|af\|_{H^s_\nu(\Omega)}\leqslant c_2\|af\|_{H^s(\Omega)}, \tag{3.5.3}$$

где постоянные $c_1$, $c_2>0$ не зависят от $f$.

Лемма 3.5.2. *Пусть $\tilde{\Omega}$ — строго внутренняя подобласть области $\Omega$. Тогда сужение функции $f\in H^s_\nu(\Omega)$ на $\tilde{\Omega}$ принадлежит пространству $H^s(\tilde{\Omega})$ и справедлива оценка*

$$\|f\|_{H^s(\tilde{\Omega})}\leqslant c\|f\|_{H^s_\nu(\Omega)}, \tag{3.5.4}$$

*в которой $c>0$ не зависит от функции $f$.*

Доказательство. Введем функцию $a\in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega)$ такую, что $a(x)\equiv 1$ при $x\in\tilde{\Omega}$. Тогда из неравенства (3.5.3) имеем

$$\|f\|_{H^s(\tilde{\Omega})}\leqslant\|af\|_{H^s(\Omega)}\leqslant c\|af\|_{H^s_\nu(\Omega)}.$$

По теореме 3.3.1 о мультипликаторах получаем

$$\|af\|_{H^s_\nu(\Omega)}\leqslant c\|f\|_{H^s_\nu(\Omega)},$$

где $c>0$ не зависит от $f$. Лемма доказана.

Пространство $H^s_{\nu,+}(\Omega)$, $s\geqslant 0$, $\nu\geqslant 0$, введенное в [63], определяется как замыкание множества всех функций из $C^\infty(\Omega)$, для которых в каждой локальной системе координат $\mathscr{D}_y^{2k+1}f=0$ при $y=0$, $k=0$,

1, 2, ..., по норме

$$\|f\|^2_{H^s_{\nu,+}(\Omega)}=\sum_{l=0}^{\bar{l}}\|\varkappa_l(h_l f)\|^2_{H^s_{\nu,+}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}, \tag{3.5.5}$$

где нормы в $H^s_{\nu,+}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ определены в § 3.1.

Лемма 3.5.3. *При $s\geqslant 0$ и $\nu\geqslant 0$ имеет место вложение $H^s_{\nu,+}(\Omega)\subset H^s_\nu(\Omega)$, понимаемое и в топологическом смысле. При $\nu\neq 1$, 3, 5, ... и четных $s>0$ пространство $H^s_{\nu,+}(\Omega)$ является собственным подпространством $H^s_\nu(\Omega)$ и индуцированная и собственная нормы в $H^s_{\nu,+}(\Omega)$ эквивалентны.*

Доказательство. Вследствие финитности $h_l f$, участвующих в определениях нормы, можно применить лемму 3.2.4.

## § 3.6. Теоремы вложения для весовых следов

Сначала рассмотрим внутренние теоремы вложения. Из теоремы 3.2.1 следует

Теорема 3.6.1. *Пусть $s'>s>0$ и* $\operatorname{Re}\nu>0$. *Тогда пространство $H^{s'}_\nu(\Omega)$ вложено в $H^s_\nu(\Omega)$ и справедливо неравенство*

$$\|f\|_{H^s_\nu(\Omega)}\leqslant c\,\|f\|_{H^{s'}_\nu(\Omega)},$$

*где $f\in H^{s'}_\nu(\Omega)$, а постоянная $c>0$ не зависит от $f$.*

Теорема 3.6.2. *При $s'>s>0$ и* $\operatorname{Re}\nu>0$ *оператор вложения пространства $H^{s'}_\nu(\Omega)$ в $H^s_\nu(\Omega)$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_j\}$ ограничена по норме пространства $H^s_\nu(\Omega)$. Обозначим через $\{\mathscr{G}_j\}$ расширяющуюся систему строго внутренних подобластей области $\Omega$, объединение которых совпадает с $\Omega$. По лемме 3.5.3 последовательность $\{f_j\}$ ограничена в смысле нормы каждого пространства $H^{s'}(\mathscr{G}_j)$, поэтому из нее можно выделить сходящуюся по норме пространства $H^s(\mathscr{G}_1)$ подпоследовательность $\{f_{1j}\}$. Обозначим предел этой последовательности через $f^{(1)}$. Из $\{f_{1j}\}$ выделим подпоследовательность $\{f_{2j}\}$, сходящуюся к $f^{(2)}$ по норме $H^s(\mathscr{G}_2)$. Ясно, что $f^{(2)}|_{\mathscr{G}_1}=f^{(1)}$. Продолжая этот процесс далее, найдем функцию $f$ такую, что при каждом $j$ сужение $f|_{\mathscr{G}_j}\in H^s(\mathscr{G}_j)$ и $f|_{\mathscr{G}_j}=f^{(j)}$. Образуем диагональную последовательность $f_{jj}$, для которой

$$\|(f-f_{jj})|_{\mathscr{G}_p}\|_{H^s(\mathscr{G}_p)}\to 0,\quad j\to\infty,\quad p=1, 2, \ldots$$

Не ограничивая общности будем считать, что сама $f_j$ обладает этим свойством.

Далее, последовательность $\{\varkappa_l h_l f_j\}$ принадлежит $H^{s'}_\nu(\omega_l^+)$ и ограничена по норме этого пространства. Тогда по теореме 3.2.2 найдется функция $g_l\in H^s_\nu(\omega_l^+)$, к которой сходится некоторая подпоследовательность последовательности $\varkappa_l h_l f_j$. Снова, не ограничивая общности, считаем, что этим свойством при всех $l=0, 1, 2, \ldots, \bar{l}$ обладает сама последовательность $f_j$. Пусть $\varepsilon>0$. Обозначим через $\omega_l^{+,\varepsilon}$ часть области $\omega_l^+$, расположенную в полупространстве $y>\varepsilon$. Тогда по лемме 3.5.3 последовательность $\varkappa_l h_l f_j|_{\{y>\varepsilon\}}$ сходится к $\varkappa_l h_l f|_{\{y>\varepsilon\}}$ по норме пространства $H^s_\nu(\omega_l^{+,\varepsilon})$. Вследствие произвольности $\varepsilon$ находим, что $g_l=\varkappa_l h_l f$ при всех $l$. Тогда $f\in H^s_\nu(\Omega)$. Доказательство завершено.

Перейдем к рассмотрению весовых следов. Нам потребуются граничные пространства $H^s(\partial\Omega)$, описание которых можно найти в [151]. Одна из эквивалентных норм пространства $H^s(\partial\Omega)$ может быть определена по формуле

$$\| \varphi \|^2_{H^s(\partial\Omega)} = \sum_{l=1}^{\bar{l}} \| \varkappa_l h_l \varphi \|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Обозначим через $\sigma_\nu$ функцию, которая в каждой локальной системе координат (л. с. к.) совпадает с ранее введенной весовой функцией $\sigma_\nu(y)$.

Будем говорить, что $f \in H^s_\nu(\Omega)$ обладает весовым следом $\sigma_\nu f|_{\partial\Omega} = \varphi$ на границе $\partial\Omega$, если в каждой локальной системе координат функции $h_l f$, $l = 1, 2, \ldots, \bar{l}$, обладают весовым $\sigma_\nu$-следом.

Обозначим через $B$ дифференциальный оператор, который в каждой л. с. к. совпадает с оператором Бесселя.

Следующее утверждение есть следствие теорем 3.4.2 и 3.4.3.

Теорема 3.6.3. *Пусть* $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$ *и* $s > 2k - \operatorname{Re}\nu + 1 > 0$. *Тогда отображение* $f \mapsto y^{2\nu+1} \frac{\partial}{\partial y} B^k f \Big|_{y=0}$, *определяемое по формуле*

$$y^{2\nu+1} \frac{\partial}{\partial y} B^k f \Big|_{y=0} = -\mathscr{D}^{2k}_y I^{\nu-1/2}_e S_{\nu,\bar{e}} f \Big|_{y=0}$$

*для функций* $f \in \overset{0}{C}{}^\infty_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, *расширяется по непрерывности до ограниченного отображения пространства* $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *в пространство* $H^{s-2k+\operatorname{Re}\nu-1}(\mathbb{R}^n)$. *Справедливо неравенство*

$$\left\| y^{2\nu+1} \frac{\partial}{\partial y} B^k f \Big|_{y=0} \right\|_{H^{s-2k+\operatorname{Re}\nu-1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \| f \|_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)},$$

*где постоянная* $c$ *не зависит от* $f$.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Для изучения $B$-эллиптических уравнений И. А. Киприяновым были введены весовые функциональные пространства (см. [63], [62]) с помощью преобразования Фурье—Бесселя; основную роль при этом сыграло наличие соответствующего весового равенства Парсеваля. В [63] им доказаны внутренние теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах для полупространства, четверти пространства и некоторых других областей.

При этом было замечено, что при переходе на границу происходит потеря гладкости на 1/2. Граничное пространство также является весовым. При построении названных весовых пространств участвует не только оператор Бесселя с вещественным параметром, но и другие сингулярные дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы (см. [62]), соответствующие преобразованию Фурье—Бесселя. Отметим, что в п. 3.3 из [63] исследовались и нелокальные граничные операторы—граничные операторы типа некоторого интеграла дробного порядка и для них также доказана теорема о следах (теорема 3.3.1 из [63]), допускающая полное обращение. Переход на границу области в рассматриваемых пространствах возможен благодаря тому, что существует интегро-дифференциальный оператор (см. [63], а также § 1.4 из гл. I), в терминах которого формулируется $H^l_{\nu,+}$ с дробным индексом $l$. Пространства в [59], [63] вводятся путем замыкания достаточно гладких

четных по нормальному к границе направлению функций; причем в процессе замыкания сохраняются не все следы. Поэтому краевые задачи, рассматриваемые в этих пространствах, аналогичны задачам типа $E$ по терминологии М. В. Келдыша [58]. По поводу приложения указанных выше пространств мы отсылаем к работам И. А. Киприянова [65, 66, 67, 73, 79, 83, 68, 77, 87, 82]. Заметим, что теория весовых пространств $H^{l}_{\nu,+}$ была применена к изучению краевых задач для $B$-эллиптических уравнений с граничными условиями на нехарактеристической части границы. На характеристической же части границы ставятся однородные условия типа условия четности. Так как применялось преобразование Фурье—Бесселя, то и параметр $\nu$ был вещественным. Пусть $\Gamma^{+}$ обозначает часть границы области $\Omega^{+}$, расположенной в соответствующем полупространстве, сама область прилегает к гиперплоскости особенностей. В работах [94, 98, 63] определены следы функций из $H^{l}_{\nu,+}(\Omega^{+})$ на достаточно гладком многообразии $\Gamma^{+}$ и доказаны прямые и обратные теоремы вложения о следах. Это позволило доказать нормальную разрешимость [93, 99] краевой задачи для $B$-эллиптического уравнения в ограниченной области $\Omega^{+}$ (построить регуляризатор и получить априорную оценку). Теоремы вложения для функциональных пространств с разными весами по различным направлениям, включая теоремы о следах, содержатся в [11], где использовалось преобразование Бесселя по каждому из двух направлений.

А. Л. Бродский в [13] ввел в рассмотрение весовые классы $L^{(r)}_{p,\nu}=L^{(r_0,\ldots,r_n)}_{p,\nu}$, являющиеся естественным обобщением, во-первых, классов $W^{r}_{p,\nu}$ на нецелые значения $r$, а во-вторых, классов $L^{(r)}_{p}$ работы П. И. Лизоркина [134] на случай сингулярного дифференциального оператора, включающего оператор Бесселя. Доказаны теоремы вложения для классов $L^{(r)}_{p,\nu}$ с помощью представления в виде обобщенной свертки. Для доказательства этих теорем были построены классы обобщенных бесселевых потенциалов, являющихся в некотором смысле аналогом для рассматриваемого здесь преобразования Фурье—Бесселя и обобщенной свертки обычных бесселевых потенциалов, изученных в [136]. Существенную роль при этом играет теорема о мультипликаторах многомерного преобразования Фурье—Бесселя в пространствах $L_{p,\nu}$. Теорема о мультипликаторах отдельно как для преобразования Фурье (см. [148]), так и для одномерного преобразования Бесселя (Ганкеля) (см. [29]) были известны ранее.

Другой подход к построению функциональных пространств $H^{s}_{\nu}$, в некотором смысле более широких, чем пространства $H^{s}_{\nu,+}$, основанный на использовании операторов преобразования, был предложен В. В. Катраховым [56, 57]. Такого типа пространства, для которых справедливы теоремы о весовых или нелокальных в определенном смысле следах, по-видимому, не изучались. При этом пространства $H^{s}_{\nu}$ нельзя просто отнести к классу весовых, поскольку при определении их использованы интегро-дифференциальные операторы. В некотором частном случае $H^{s}_{\nu}$ содержит в качестве собственного подпространства пространство $H^{s}_{\nu,+}$, введенное И. А. Киприяновым. Теперь параметр $\nu$ может принимать комплексные значения. Пространства $H^{s}_{\nu}$ были использованы (см. [55—57]) при изучении общих сингулярных краевых задач с граничными условиями на характеристической части границы. Для этих задач доказаны соответствующие априорные оценки, существование регуляризаторов и нормальная разрешимость в соответствующих функциональных пространствах.

# ГЛАВА IV

# СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Настоящая глава посвящена некоторым задачам для сингулярных уравнений в частных производных, содержащих по одной или нескольким переменным оператор Бесселя.

В § 4.1 с помощью преобразования Фурье—Бесселя находится решение уравнения $\Delta_B^m u = \delta_B$ в пространстве распределений $S'_+$. При этом используются формулы (1.7.8) и (1.7.11) гл. I и оператор обобщенного сдвига (см. § 1.3, гл. I), соответствующий оператору Бесселя. Найденное решение (4.1.9) представляет собой фундаментальное решение оператора $\Delta_B^m$, содержащего по группе переменных оператор Лапласа, а по переменной $y$ оператор Бесселя с особенностью на гиперплоскости $y=0$. Для получения решения с особенностью в произвольной точке необходимо применить обычный сдвиг по $x$ и обобщенный сдвиг по переменной $y$ (см. § 1.8). Порядок особенности при обобщенном сдвиге по $y$ сглаживается и решение внутри полупространства $y>0$ ведет себя так же, как и фундаментальное решение оператора $\Delta^m$, где $\Delta$ — оператор Лапласа, т. е. имеет тот же порядок особенности.

В § 4.2 с помощью обычного скалярного произведения и классического оператора преобразования Пуассона (см. гл. II) строится функция вида

$$|w\cdot x|_B^\lambda = \int_0^\pi \left| \sum_{i=1}^n w_i x_i + w_{n+1} x_{n+1} \cos\alpha \right|^\lambda \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha,$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$, которая называется *плоской весовой волной*. Дается разложение $r^\lambda$ на плоские весовые волны (4.2.11). Отсюда, как частный случай, получается разложение $\delta_B$-функций на весовые плоские волны (4.2.12).

В § 4.3 приводится построение фундаментального решения сингулярного $B$-эллиптического оператора $\mathscr{L}(D_x, B_y)$ порядка $2m$ с постоянными коэффициентами в терминах распределений, причем используется обычный метод — правая часть заменяется на $r^\lambda$ с последующим разложением на плоские весовые волны. С помощью специальных представлений решения исходное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, существование решения которого затем доказывается. В случае однородного уравнения используемая методика позволяет найти явную конструкцию фундаментального решения — формулы (4.3.15) — (4.3.17). Имеют место в окрестности начала координат оценки (4.3.18).

В § 4.4 аналог классического разложения Радона гладких финитных функций строится по функциям типа плоских весовых волн. Если $\gamma=n+k-1$ является нечетным числом, то искомое разложение имеет вид

$$f(x)=C\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} f(y)\left\{\int\limits_{\Omega} T_x^y\,|y\cdot x|_B^{\nu}\,|\omega_{n+1}|^k\,d\Omega\right\} y_{n+1}^k\,dy,$$

где $C$ — постоянная, а число $\nu$ таково, что $\nu+\gamma$ — четное. В случае четного $\gamma$ разложение имеет несколько другой вид (4.4.9).

В § 4.5 дается другой подход к построению фундаментального решения $B$-эллиптического оператора с постоянными коэффициентами, использующий аналог классического преобразования Радона. § 4.6 является фактически подготовительным для § 4.7, 4.8, 4.9, в которых изучаются общие весовые краевые задачи для сингулярных $B$-эллиптических уравнений, содержащих по одной из переменных оператор Бесселя с комплексным параметром $\nu$. Дело в том, что операторы преобразования сводят изучаемую весовую краевую задачу к регулярной эллиптической краевой задаче, но, вообще говоря, с нелокальными краевыми условиями, в которых присутствует оператор луивиллевского типа $I_-^{\mu}$ (см. гл. II) комплексного «порядка» $\mu$. Строится регуляризатор и доказывается соответствующая априорная оценка.

В § 4.7 дается постановка весовой краевой задачи в полупространстве для однородных операторов, содержащих по одной переменной оператор Бесселя, с постоянными коэффициентами, которая методом операторов преобразования сводится к краевой задаче, изученной в § 4.6. Заметим, что, применяя операторы преобразования для уравнений с переменными коэффициентами, приходим к псевдодифференциальным операторам, у которых символ по двойственным переменным имеет особенность высокого порядка на одной из координатных гиперплоскостей. Теория таких псевдодифференциальных операторов до сих пор не разработана. Поэтому в случае переменных коэффициентов мы пользуемся шаудеровской техникой, связанной с «замораживанием» коэффициентов и последующей склейкой с применением разбиения единицы. В соответствии с этим в § 4.8 рассматривается краевая задача с малоизменяющимися коэффициентами.

В § 4.9 изучена весовая краевая задача в ограниченной области. Доказана нетеровость этой задачи.

## § 4.1. Итерированное уравнение $\Delta_B^m u=\delta_B$

Будем искать решения уравнения

$$\Delta_B^m u=\delta_B(x, y), \tag{4.1.1}$$

где $\Delta_B=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}$, в пространстве $S'_+$. После применения к обеим частям уравнения (4.1.1) преобразования Фурье—Бесселя (см. § 1.7) получаем

$$(-1)^m\rho^{2m}V=1, \tag{4.1.2}$$

где $\rho^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2+\tau^2$. Если $2m<\gamma$, где $\gamma=n+k+1$, то решение последнего уравнения является локально суммируемой функцией

$$V=\frac{(-1)^m}{\rho^{2m}}. \tag{4.1.3}$$

Пусть теперь $\lambda=-2m$ не есть полюс аналитической функции $r^\lambda$ (см. § 1.2). Тогда, как нетрудно проверить, решением уравнения (4.1.1) служит функционал

$$V=(-1)^m\rho^{-2m}. \tag{4.1.4}$$

Пусть, наконец, $\lambda=-2m$ является полюсом аналитической функции $r^\lambda$ (см. § 1.2).

Рассмотрим разложение $\rho^\lambda$ в окрестности этой точки в ряд Лорана:

$$\rho^\lambda=\frac{a_{-1}}{\lambda+2m}+a_0+a_1(\lambda+2m)+\ldots \tag{4.1.5}$$

Умножим это равенство на $\rho^{2m}$ и перейдем к пределу при $\lambda\to-2m$. В левой части получим единицу, а в правой все члены, начиная с третьего, обратятся в нуль. Отсюда следует, что $\rho^{2m}a_{-1}=0$, потому

$$\rho^{2m}a_0=1. \tag{4.1.6}$$

Итак, решением уравнения (4.1.1) является в данном случае

$$V=(-1)^m\rho^{-2m}. \tag{4.1.7}$$

Найдем теперь обратное преобразование Фурье—Бесселя (см. § 1.7). В первом случае в соответствии с формулой (1.7.8) из § 1.7 имеем $u=cr^{2m-\gamma}$, где $r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+y^2$. Тот же результат мы получаем во втором случае, используя также формулу (1.7.8). В третьем случае используем следующую формулу:

$$F_\nu\left[(-1)^m\rho^{-2m}\right]=c_1r^{2m-\gamma}\ln r+c_2r^{2m-\gamma}. \tag{4.1.8}$$

В этом случае $\gamma$—четное и $2m\geqslant\gamma$. Поэтому второе слагаемое $c_2r^{2m-\gamma}$ оператором $\Delta_B^m$ переводится в нуль. Итак, искомое решение (фундаментальное) (см. [64]) имеет вид

$$u(x,y)=\begin{cases}c_1r^{2m-\gamma}\ln r, & \text{если } 2m\geqslant\gamma \text{ и } \gamma\equiv0 \pmod 2,\\ c_2r^{2m-\gamma} & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{4.1.9}$$

Для получения фундаментального решения с особенностью в произвольной точке $(s,t)$ применим к $u(x,y)$ оператор обычного сдвига по переменной $x$ и обобщенного сдвига по переменной $y$ (см. § 1.8). Формулы для решения будут иметь соответственно следующий вид:

$$u(x,y;s,t)=c_3\int_0^\pi\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+y^2+t^2-2yt\cos\alpha\right]^{\frac{2m-\gamma}{2}}\times$$

$$\times \ln \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - s_i)^2 + y^2 + t^2 - 2yt\cos\alpha \right|^{1/2} \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha, \quad (4.1.10)$$

$$u(x,\ y;\ s,\ t) = c_4 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{i=1}^{n} (x_i - s_i)^2 + y^2 + t^2 - 2yt\cos\alpha \right]^{\frac{2m-\gamma}{2}} \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha.$$

## § 4.2. Разложение $r^\lambda$ на плоские весовые волны

Рассмотрим на $S_+$ функционал

$$(|\omega \cdot x|_B^\lambda,\ \varphi) = \int_{R^n} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\pi} \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \omega_{n+1} y \cos\alpha \right|^\lambda \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha \right] \varphi(x,\ y)\, y^k dy\, dx, \quad (4.2.1)$$

порожденный локально суммируемой при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ функцией

$$|\omega \cdot x|_B^\lambda = \int_0^{\pi} \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \omega_{n+1} y \cos\alpha \right|^\lambda \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha, \quad (4.2.2)$$

где $\omega = (\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n,\ \omega_{n+1})$ — произвольный вектор на единичной сфере. Функционал (4.2.1) можно аналитически продолжить по параметру $\lambda$ в левую полуплоскость. Действительно, положив $y\cos\alpha = z$, $y\sin\alpha = \tau$, мы получим представление интеграла (4.2.1) в виде

$$(|\omega \cdot x|_B^\lambda,\ \varphi) = \int_{R^{n+1}} \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \omega_{n+1} z \right|^\lambda \varphi_0(x,\ z)\, dx\, dz, \quad (4.2.3)$$

где

$$\varphi_0(x,\ z) = \int_0^{\infty} \tau^{k-1} \varphi\left(x,\ \sqrt{z^2 + \tau^2}\right) d\tau.$$

Функция $\varphi_0(x,\ z)$ бесконечно дифференцируема и убывает при $r \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{r}\left(r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y^2\right)$ вместе со всеми производными, т. е. принадлежат пространству $S$ (см. [21]). Тогда правая часть равенства (4.2.3) аналитически продолжается на все $\lambda$, кроме $\lambda = -1,\ -3,\ -5,\ \ldots$, где она имеет полюсы первого порядка. Этим самым построено аналитическое продолжение и левой части. Отсюда следует, что функционал $|\omega x|_B^\lambda / \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$ будет целой аналитической функцией от $\lambda$. Мы можем построить аналогичным способом аналитическое продолжение функционала

$$(|\omega \cdot x|_B^\lambda \operatorname{sign}(\omega \cdot x),\ \varphi) = \int_{R^n} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\pi} \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \omega_{n+1} y \cos\alpha \right| \times \right.$$

$$\times \operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \omega_{n+1} y \cos\alpha\right) \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha \Bigg] \varphi(x, y) y^k dy\, dx. \quad (4.2.4)$$

Этот функционал, как функция $\lambda$, имеет полюсы в точках $\lambda = -2, -4, -6, \ldots$ Функция

$$|\omega \cdot x|_B^\lambda \operatorname{sign}(\omega \cdot x) / \Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right) \quad (4.2.5)$$

является целой аналитической функцией $\lambda$. Для построенных распределений справедливы следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |\omega \cdot x|_B^\lambda = \lambda \omega_i |\omega \cdot x|_B^{\lambda-1} \operatorname{sign}(\omega \cdot x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |\omega \cdot x|_B^\lambda \operatorname{sign}(\omega \cdot x) = \lambda \omega_i |\omega \cdot x|_B^{\lambda-1}, \quad (4.2.6)$$

$$B_y |\omega \cdot x|_B^\lambda = \lambda(\lambda-1) \omega_{n+1}^2 |\omega \cdot x|_B^{\lambda-2}.$$

Для «хороших» $\lambda$ эти формулы нетрудно получить непосредственно или с помощью интегрирования по частям, для произвольных $\lambda$ они остаются верными в силу аналитического продолжения. Заметим, что построенные функционалы непрерывны относительно $\omega$. Отсюда следует возможность интегрирования функционала $|\omega \cdot x|_B^\lambda$ по единичной сфере $|\omega| = 1$ с непрерывным весом $|\omega_{n+1}|^k$, т. е. можно построить функционал

$$\int_\Omega |\omega \cdot x|_B^\lambda |\omega_{n+1}|^k d\Omega. \quad (4.2.7)$$

Найдем явное выражение этого функционала. Для этого при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ нам нужно вычислить интеграл

$$J = \int_\Omega \left[ \int_0^\pi \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \omega_{n+1} y \cos\varphi \right|^\lambda \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi \right] |\omega_{n+1}|^k d\Omega. \quad (4.2.8)$$

Положим $\omega_{n+1}\cos\varphi = \alpha_1$, $\omega_{n+1}\sin\varphi = \alpha_2$. Тогда (4.2.8) можно переписать в виде

$$J = \int_{\Omega_1} \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \alpha_1 y \right|^\lambda |\alpha_2|^{k-1} d\Omega_1, \quad (4.2.9)$$

или

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{|\alpha_2|^{k-1}}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} d\alpha_2 \int_{\Omega_2} \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \alpha_1 y \right|^\lambda d\Omega_2, \quad (4.2.10)$$

где $\Omega_1$ — сфера $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, $d\Omega_1$ — элемент поверхности этой сферы, $\Omega_2$ — сфера $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \alpha_1^2 = 1 - \alpha_2^2$, $d\Omega_2$ — элемент поверхности этой сферы. Отсюда видно, что интеграл (4.2.7) инвариантен относительно поворота вектора $(x, y)$. Полагая $x_1 = r$, $x_2 = \ldots = x_n = y = 0$, после

несложных выкладок получаем

$$\left[\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\Omega}|\omega\cdot x|_B^{\lambda}|\omega_{n+1}|^k\,d\Omega=\frac{2r^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\gamma}{2}\right)},\qquad(4.2.11)$$

где $\gamma=n+k+1$.

Равенство (4.2.11), доказанное для $\operatorname{Re}\lambda>-1$, остается справедливым для произвольных $\lambda$ в силу аналитического продолжения и представляет собой разложение $r^{\lambda}$ на плоские весовые волны [64]. Рассмотрим частный случай этой формулы при $\lambda=-\gamma$. Пусть $\gamma=n+k+1$ не является нечетным числом. Тогда имеем

$$\delta_B(x, y)=C_1(n, k)\int_{\Omega}|\omega\cdot x|_B^{-\gamma}|\omega_{n+1}|^k\,d\Omega,\qquad(4.2.12)$$

где

$$C_1(n, k)=\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right)\Bigg/\left[2\pi^n\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-n-k}{2}\right)\right].$$

Пусть теперь $\gamma=n+k+1$ — нечетное число. Полагая $|\omega\cdot x|_B^{-\gamma}=\lim\limits_{\lambda\to-\gamma}|\omega\cdot x|_B^{\lambda}/\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$, получаем

$$\delta_B(x, y)=C_2(n, k)\int_{\Omega}|\omega\cdot x|_B^{-\gamma}|\omega_{n+1}|^k\,d\Omega,$$

где

$$C_2(n, k)=\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right)\Bigg/\left[2\pi^n\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\right].$$

## § 4.3. *B*-эллиптическое уравнение $\mathscr{L}(D_x, B_y)u=a_0\delta_B(x, y)$

Рассмотрим уравнение вида

$$\mathscr{L}(D_x, B_y)u=a_0\delta_B(x, y),\qquad(4.3.1)$$

где $\mathscr{L}(D_x, B_y)$ — линейный дифференциальный оператор порядка $2m$ с постоянными коэффициентами $B$-эллиптического типа (см. [61]), $a_0$ — постоянная из § 1.2.

Для решения уравнения (4.3.1) применим следующий метод (см., например, [21]). Заменим правую часть (4.3.1) функцией $2r^{\lambda}/\Gamma\left(\frac{\lambda+\gamma}{2}\right)$, а последнюю разложим на плоские весовые волны (см. § 4.2). Тогда будем иметь уравнение

$$\mathscr{L}(D_x, B_y)u=\left[\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\Omega}|\omega\cdot x|_B^{\lambda}|\omega_{n+1}|^k\,d\Omega.\qquad(4.3.2)$$

Если $v_{\lambda,\omega}(x, y)$ есть решение уравнения

$$\mathscr{L}(D_x, B_y)u=\left[\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\right]^{-1}|\omega\cdot x|_B^\lambda, \tag{4.3.3}$$

то решение (4.3.2) запишется в виде

$$u_\lambda(x, y)=\int_\Omega v_{\lambda,\omega}(x, y)\,|\omega_{n+1}|^k\,d\Omega. \tag{4.3.4}$$

Решение уравнения (4.3.3) будем искать в виде

$$v_{\lambda,\omega}(x, y)=\int_0^\pi W_{\lambda,\omega}\left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i+\omega_{n+1}y\cos\alpha\right)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha. \tag{4.3.5}$$

Имеем

$$\frac{\partial v_{\lambda,\omega}(x, y)}{\partial x_i}=\int_0^\pi \omega_i W'_{\lambda,\omega}\left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i+\omega_{n+1}y\cos\alpha\right)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha, \tag{4.3.6}$$

$$B_y v_{\lambda,\omega}(x, y)=\int_0^\pi \omega_{n+1}^2 W''_{\lambda,\omega}\left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i+\omega_{n+1}y\cos\alpha\right)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha.$$

Поэтому находим, что

$$\mathscr{L}(D_x, B_y)v_{\lambda,\omega}(x, y)=$$

$$=\int_0^\pi \mathscr{L}\left(\omega_1\frac{d}{d\xi}, \ldots, \omega_n\frac{d}{d\xi}, \omega_{n+1}^2\frac{d^2}{d\xi^2}\right)W_{\lambda,\omega}(\xi)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha. \tag{4.3.7}$$

Потребуем, чтобы функция $W_{\lambda,\omega}(\xi)$ была решением следующего уравнения:

$$\mathscr{L}\left(\omega_1\frac{d}{d\xi}, \ldots, \omega_n\frac{d}{d\xi}, \omega_{n+1}^2\frac{d^2}{d\xi^2}\right)W(\xi)=|\xi|^\lambda\Big/\left[\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\right]. \tag{4.3.8}$$

Известно (см. [21]), что существует распределение $W_{\lambda,\omega}(\xi)$, являющееся решением этого уравнения при всех $\lambda$. В силу $B$-эллиптического оператора $\mathscr{L}(D_x, B_y)$ модуль старшего коэффициента $\mathscr{L}_0(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}^2)$ уравнения (4.3.8), где $\mathscr{L}_0$ — главная часть оператора $\mathscr{L}$, имеет положительный минимум, а остальные коэффициенты непрерывно зависят от вектора $\omega$. Следовательно, функция $W_{\lambda,\omega}(\xi)$ непрерывно, в смысле распределений, зависит от $\omega$. Построим функционал

$$(v_{\lambda,\omega}(x, y),\ \varphi(x, y))=(W_{\lambda,\omega}(\xi),\ \varphi_0(x, z)), \tag{4.3.9}$$

где

$$\xi=\sum_{i=1}^n \omega_i x_i+\omega_{n+1}z,$$

$$\varphi_0(x, z)=\int_0^\infty \tau^{k-1}\varphi\left(x, \sqrt{z^2+\tau^2}\right)d\tau,$$

$v_{\lambda,\omega} \in S'_+$ и $W_{\lambda,\omega} \in S'$. Можно проверить, что при надлежащих $\lambda$ такое определение $v_{\lambda,\omega}$ превращается в равенство (4.3.5). Кроме того, справедлива формула

$$(\mathscr{L}(D_x, B_y)v_{\lambda,\omega}(x, y), \varphi(x, y))=$$
$$=\left(\mathscr{L}\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \dots, \omega_n \frac{d}{d\xi}, \omega_{n+1}^2 \frac{d^2}{d\xi^2}\right) W_{\lambda,\omega}(\xi), \varphi_0(x, z)\right). \qquad (4.3.10)$$

Итак, мы построили $v_{\lambda,\omega}$ для всех $\lambda$. Покажем, что

$$u(x, y)=\int_{\Omega} v_{-\gamma,\omega}(x, y) \qquad (4.3.11)$$

решает исходную задачу. Действительно, имеем

$$(\mathscr{L}(D_x, B_y)u, \varphi(x, y))=\int_{\Omega} (\mathscr{L}(D_x, B_y)v_{-\gamma,\omega}, \varphi(x, y))|\omega_{n+1}|^k d\Omega=$$
$$=\int_{\Omega}\left(\mathscr{L}\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \dots, \omega_n \frac{d}{d\xi}, \omega_{n+1}^2 \frac{d^2}{d\xi^2}\right) \times\right.$$
$$\left.\times W_{-\gamma,\omega}(\xi), \varphi_0(x, z)\right)|\omega_{n+1}|^k d\Omega=$$
$$=\int_{\Omega} (C(n, k)|\xi|^{-\gamma}, \varphi_0(x, z))|\omega_{n+1}|^k d\Omega=$$
$$=C(n, k)\int_{\Omega} (|\omega\cdot x|_B^{-\gamma}, \varphi(x, y))|\omega_{n+1}|^k d\Omega=$$
$$=\left(C(n, k)\int_{\Omega} |\omega\cdot x|_B^{-\gamma}|\omega_{n+1}|^k d\Omega, \varphi(x, y)\right)=(a_0\delta_B(x, y), \varphi(x, y)), \qquad (4.3.12)$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим подробнее случай однородного уравнения. В этом случае уравнение (4.3.8) запишется в виде

$$\mathscr{L}(\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}^2)\, W^{(2m)}(\xi)=[\xi]^{\lambda}\left[\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\right]^{-1}. \qquad (4.3.13)$$

В качестве частного решения этого уравнения может быть взята функция

$$W(\xi)=\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\mathscr{L}(\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}^2)\times$$
$$\times(|\xi|^{\lambda+2m}[(\lambda+1)\dots(\lambda+2m)]^{-1}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m} \xi^{2m-2k}[(2k-1)!(2m-k)!(\lambda+2k)]^{-1}. \qquad (4.3.14)$$

Далее можно построить $v_{\lambda,\omega}(x, y)$ и $u_\lambda(x, y)$ и перейти к пределу при $\lambda\to-\gamma$. Пусть $2m\geqslant\gamma$ и $\gamma$ не является четным числом. Тогда

фундаментальное решение имеет вид

$$u(x, y)=C(n, k)\int_{\Omega}\left[\int_0^{\pi}\left|\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i+\omega_{n+1} y\cos\alpha\right|^{2m-\gamma}\sin^{k-1}\alpha\, d\alpha\right]|\omega_{n+1}|^k\times$$
$$\times\left[\mathscr{L}(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}^2)\right]^{-1}d\Omega \quad (4.3.15)$$

с соответствующим значением постоянной $C(n, k)$ (см. [13]). В случае четного $\gamma$ имеем

$$u(x, y)=C(n, k)\int_{\Omega}\left[\int_0^{\pi}\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i+\omega_{n+1} y\cos\alpha)^{2m-\gamma}\ln\left|\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\omega_{n+1} y\cos\alpha\right|\sin^{k-1}\alpha\, d\alpha\right]\cdot|\omega_{n+1}|^k\left[\mathscr{L}(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}^2)\right]^{-1}d\Omega, \quad (4.3.16)$$

где постоянная $C(n, k)$ определяется по формуле

$$C(n, k)=\frac{(-1)^{\frac{n+k-1}{2}}(2m-\gamma)!}{\pi^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{n+k}\left(\frac{n+k-1}{2}\right)!}.$$

В обоих случаях фундаментальное решение является обычной функцией. Пусть теперь $2m<\gamma$, тогда решение имеет вид

$$u(x, y)=C(n, k)\int_{\Omega}|\omega\cdot x|_B^{2m-\gamma}|\omega_{n+1}|^k\mathscr{L}(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}^2)\,d\Omega \quad (4.3.17)$$

с соответствующей постоянной $C(n, k)$ (см. [64]). Фундаментальное решение (4.3.17) также является обычной функцией (а не распределением), так как однородная функция степени $2m-(n+k+1)$ интегрируема в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ с весом $y^k$. Чтобы получить фундаментальное решение с особенностью в произвольной точке $(s, t)$, нужно в формулах (4.3.15)—(4.3.17) применить обычный сдвиг по $x$ и обобщенный сдвиг по $y$. В окрестности начала координат имеют место (см. [64]) оценки:

$$u(x, y)=\begin{cases} O(r^{2m-\gamma}\ln r), & \text{если } 2m\geqslant\gamma,\ \gamma \text{ четное},\\ O(r^{2m-\gamma}) & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \quad (4.3.18)$$

После применения оператора обобщенного сдвига по $y$ характер особенности сглаживается (см. [64]), и решение внутри области ведет себя так же, как фундаментальное решение соответствующего эллиптического уравнения.

## § 4.4. Разложение гладкой финитной функции на плоские весовые волны

Пусть $f(t)$ — непрерывная четная функция. Рассмотрим для $k>0$ оператор преобразования Пуассона (см. § 2.1), записанный в виде

$$\mathscr{P}_x^{(k)}f=2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Big/\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]\int_0^{\pi}\cos^{k-1}\theta f(x\sin\theta)\,d\theta=$$

$$=\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\cdot\left[\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}\int\limits_{0}^{\pi} f(x\cos\alpha)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha.$$

Оператор $\mathcal{P}_x^{(k)}$ обладает важным свойством — он преобразует оператор Бесселя $B_x$ в обыкновенную вторую производную

$$B_x\mathcal{P}_x^{(k)}=\mathcal{P}_x^{(k)}D_x^2. \tag{4.4.1}$$

Это свойство нетрудно проверить непосредственно с помощью интегрирования по частям. Пусть $x=(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$, $\omega=(\omega_1, ..., \omega_n, \omega_{n+1})$. С помощью обычного скалярного произведения и оператора Пуассона вводим в рассмотрение функцию вида

$$|\omega\cdot x|_B^\lambda=\int\limits_0^\pi\Big|\sum_{i=1}^n\omega_i x_i+\omega_{n+1}x_{n+1}\cos\alpha\Big|^\lambda\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha,$$

которую мы и называем функцией типа плоских весовых волн (см. также § 4.2 и 4.3). Из (4.4.1) следует, что для этой функции справедлива формула

$$B_{x_{n+1}}|\omega\cdot x|_B^\lambda=\lambda(\lambda-1)\omega_{n+1}^2|\omega\cdot x|_B^{\lambda-2}.$$

Пусть $\Omega$ — единичная сфера $|\omega|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i^2}=1$. Найдем весовое среднее $|\omega\cdot x|_B^\lambda$ по сфере $\Omega$. Имеем

$$\int\limits_\Omega|\omega\cdot x|_B^\lambda|\omega_{n+1}|^k d\Omega=\int\limits_\Omega\Big\{\int\limits_0^\pi\Big|\sum_{i=1}^n\omega_i x_i+$$
$$+\omega_{n+1}x_{n+1}\cos\alpha\Big|^\lambda\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha\Big\}|\omega_{n+1}|^k d\Omega.$$

Положим $\alpha_1=\omega_{n+1}\cos\alpha$, $\alpha_2=\omega_{n+1}\sin\alpha$. Тогда имеем

$$\int\limits_\Omega|\omega\cdot x|_B^\lambda|\omega_{n+1}|^k d\Omega=\int\limits_{\Omega_1}\Big|\sum_{i=1}^n\omega_i x_i+x_{n+1}\alpha_1\Big|^\lambda|\alpha_2|^{k-1}d\Omega_1,$$

где $\Omega_1$ — единичная сфера $\sum_{i=1}^n\omega_i^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$. Выделяя интегрирование по оси $\alpha_2$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_1}\Big|\sum_{i=1}^n\omega_i x_i+x_{n+1}\alpha_1\Big|^\lambda|\alpha_2|^{k-1}d\Omega_1=$$
$$=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{|\alpha_2|^{k-1}}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}d\alpha_2\int\limits_{\sum_{i=1}^n\omega_i^2+\alpha_1^2=1-\alpha_2^2}\Big|\sum_{i=1}^n\omega_i x_i+x_{n+1}\alpha_1\Big|^\lambda d\Omega_3,$$

где $d\Omega_3=(1-\alpha_2^2)^{n/2}d\Omega$. Внутренний интеграл есть однородная центрально-симметричная функция, откуда следует, что с точностью до постоянной он равен $|x|^\lambda$. После несложных вычислений (см.

[69]) имеем

$$\int_{\Omega} |\omega\cdot x|_B^{\nu} |\omega_{n+1}|^k d\Omega = 2\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) |x|^{\nu} \Big/ \Gamma\left(\frac{n+k+\nu+1}{2}\right). \qquad (4.4.2)$$

Аналогичным способом получаем

$$\int_{\Omega} |\omega\cdot x|^{\nu} \ln|\omega\cdot x|_B |\omega_{n+1}|^k d\Omega =$$
$$= 2\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) |x|^{\nu} (\ln|x| + C_{n,k,\nu}) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+k+\nu+1}{2}\right), \qquad (4.4.3)$$

где

$$|\omega\cdot x|^{\nu} \ln|\omega\cdot x|_B = \int_0^{\pi} \left|\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \omega_{n+1} x_{n+1} \cos\alpha\right|^{\lambda} \ln\left|\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + \right.$$
$$\left. + \omega_{n+1} x_{n+1} \cos\alpha\right| \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha.$$

Пусть $f(x)$ финитно в полупространстве $x_{n+1} \geqslant 0$ и удовлетворяет условию Гёльдера. Тогда объемный потенциал

$$u(x) = \Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right) \Big/ \left[\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)(2-\gamma)\right] \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} T_x^y |y|^{2-\gamma} f(y) y_{n+1}^k\, dy, \qquad (4.4.4)$$

где $\gamma = n+k+1$, является решением уравнения

$$\Delta_B u(x) = f(x). \qquad (4.4.5)$$

Здесь $\Delta_B$ — оператор вида

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_{x_{n+1}},$$

$T_x^y$ — оператор обобщенного сдвига

$$T_x^y f(t) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Big/ \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right] \times$$
$$\times \int_0^{\pi} f\left(x_1 - y_1, \ldots, \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 - 2x_{n+1} y_{n+1} \cos\alpha}\right) \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha.$$

В § 3 работы [69] изучены свойства обобщенных объемных потенциалов, из которых следует, что достаточно доказать справедливость (4.4.5) для $f \equiv 1$. В этом случае равенство легко проверяется интегрированием по частям.

Имеют место также следующие формулы дифференцирования. Пусть $\nu > 0$ и такое, что $\gamma + \nu$ — четное. Тогда

$$\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma+2}{2}} r^{\nu} = 2^{\frac{\nu+\gamma+2}{2}} \left(\frac{\nu+\gamma+2}{2}\right)! (4-\gamma)(6-\gamma)\ldots\nu r^{2-\gamma}. \qquad (4.4.6)$$

Если же $\gamma$ — четное, то имеем

$$\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma-2}{2}} r^\nu \ln r =$$

$$=(-1)^{\frac{\gamma-2}{2}} 2^{\gamma+\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) (2-\gamma)^{-1} r^{2-\gamma}. \qquad (4.4.7)$$

Используя теперь (4.4.2), (4.4.4), (4.4.5) и (4.4.6) и то, что оператор $T_x^y$ коммутирует со всеми участвующими здесь операторами дифференцирования, получаем основное разложение на плоские весовые волны

$$\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}} \int\limits_{R_+^{n+1}} f(y) \left\{ \int\limits_\Omega T_x^y |y\cdot\omega|_B^\nu |\omega_{n+1}|^k d\Omega \right\} y_{n+1}^k \, dy = C_{n,k,\nu} f(x) \qquad (4.4.8)$$

с соответствующей постоянной $C_{n,k,\nu}$ (см. [33]). В случае четного $\gamma$, используя формулы (4.4.3), (4.4.4), (4.4.5) и (4.4.7), имеем

$$\Delta_B^{\frac{\gamma+\nu}{2}} \int\limits_{R_+^{n+1}} f(y) \{ \int\limits_\Omega T_x^y |y\cdot\omega|_B^\nu \ln|y\cdot\omega|_B |\omega_{n+1}|^k d\Omega \} y_{n+1}^k \, dy = C_{n,k,\nu} f(x), \qquad (4.4.9)$$

где

$$C_{n,k,\nu} = (-1)^{\frac{\gamma-2}{2}} (2\pi)^{n+1} \Gamma(k) \Gamma(\nu+1).$$

## § 4.5. $B$-эллиптическое уравнение $\mathscr{L}(D_{x'}, B_{x_{n+1}})u=f$

Пусть

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, B_{x_{n+1}}\right) = \mathscr{L}(x, D_x; B_{x_{n+1}}) =$$

$$= \sum_{2j+r\leqslant 2m} \sum_{i_1,\ldots,i_r=1} A_j^{(i_1,\ldots,i_r)}(x) \frac{\partial^r}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_r}} B_{x_{n+1}}^j$$

— линейный дифференциальный оператор порядка $2m$, коэффициенты которого являются вещественными функциями, определенными в области $\Omega$ евклидова полупространства $\mathbb{R}_+^{n+1}$ $(x_{n+1}>0)$. Пусть $\Omega$ прилегает к гиперплоскости $x_{n+1}=0$. Оператор $\mathscr{L}$ называется $B$-эллиптическим в области (см. [61], [64]), если при любом $x\in\Omega$ и любом векторе $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ выполняется неравенство

$$\mathscr{L}_0(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}^2) \geqslant \delta |\alpha|^{2m},$$

где $\delta$ — положительное число, $\mathscr{L}_0$ — главная часть оператора $\mathscr{L}$. Простейшим $B$-эллиптическим оператором является оператор вида

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} + \frac{k}{x_{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}.$$

Пусть $\mathscr{L}(D_x; B_{x_{n+1}})$ является $B$-эллиптическим оператором с постоянными коэффициентами. Будем искать решения уравнения

$$\mathscr{L}(D_x; B_{x_{n+1}}) u = f(x) \qquad (4.5.1)$$

с гладкой финитной правой частью. Так как $f(x)$ мы можем

разложить на плоские весовые волны, то достаточно решить (4.5.1) для правой части специального вида. Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{L}(D_x;\ B_{x_{n+1}})\,v=\int\limits_{\Omega} g_B(\omega\cdot x)\,|\omega_{n+1}|^k\,d\Omega, \tag{4.5.2}$$

где

$$g_B(\omega\cdot x)=\int\limits_0^{\pi} g\Big(\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i+\omega_{n+1}x_{n+1}\cos\alpha\Big)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha.$$

Будем искать решения уравнения (4.5.2) в виде

$$v(x)=\int\limits_{\Omega} u_\omega(x)\,|\omega_{n+1}|^k\,d\Omega, \tag{4.5.3}$$

где функция $u_\omega(x)$ есть решение уравнения

$$\mathscr{L}(D_x;\ B_{x_{n+1}})\,u_\omega(x)=g_B(\omega\cdot x). \tag{4.5.4}$$

Функцию $u_\omega(x)$ будем искать в виде

$$u_\omega(x)=\int\limits_0^{\pi}\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\omega_i+x_{n+1}\,\omega_{n+1}\cos\alpha\Big)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha. \tag{4.5.5}$$

Положим $\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i x_i+x_{n+1}\omega_{n+1}\cos\alpha$. С помощью дифференцирования и интегрирования по частям имеем

$$\mathscr{L}(D_x;\ B_{x_{n+1}})\,u_\omega(x)=\int\limits_0^{\pi}\mathscr{L}\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ \ldots,\ \omega_{n+1}^2\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\varphi(\xi)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha.$$

В силу (4.5.4) потребуем

$$\mathscr{L}\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ \ldots,\ \omega_n\frac{d}{d\xi},\ \omega_{n+1}^2\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\varphi(\xi)=g(\xi). \tag{4.5.6}$$

Решение этого уравнения запишем с помощью интеграла Дюамеля

$$\varphi(\xi)=\int\limits_0^{\xi}W'(\xi-\tau)\,g(\tau)\,d\tau,$$

где $W(s)$ есть решение следующей задачи Коши:

$$\mathscr{L}\left(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ \ldots,\ \omega_n\frac{d}{d\xi},\ \omega_{n+1}^2\frac{d^2}{d\xi^2}\right)W=1,$$

$$W^{(i)}(0)=0,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ 2m-1.$$

Решение этой задачи можно записать явно с помощью контурного интеграла

$$W(s)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C e^{s\lambda}/[\lambda\mathscr{L}(\omega\lambda)]\,d\lambda,$$

где $C$ — контур на комплексной $\lambda$-плоскости, который охватывает все корни знаменателя.

В силу $B$-эллиптичности оператора $\mathscr{L}(D_x; B_{x_{n+1}})$ старший коэффициент многочлена $\mathscr{L}(\omega\lambda)$, который является характеристической формой, имеет положительный минимум, и потому корни знаменателя равномерно по $\omega$ ограничены при $|\omega| \leqslant 1$. Итак, решение уравнения (4.5.6) будет иметь вид

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\xi \oint_C e^{(\xi-\tau)\lambda} / \mathscr{L}(\omega\lambda)\, d\lambda\, g(\tau)\, d\tau.$$

С помощью (4.5.5) и (4.5.3) находим, что

$$v(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Omega \int_0^\pi \int_0^\xi \oint_C e^{(\xi-\tau)\lambda} / \mathscr{L}(\omega\lambda)\, d\lambda\, g(\tau)\, d\tau \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha\, |\omega_{n+1}|^k\, d\Omega.$$

Положим

$$g(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{c'_{n,k,\nu}} |\tau|^\nu & \text{при } \gamma, \text{ не являющимися четными,} \\ \dfrac{1}{c''_{n,k,\nu}} |\tau|^\nu \ln|\tau| & \text{при } \gamma \text{ четном.} \end{cases}$$

Тогда функция

$$\mathscr{K}(x) = \Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}} v(x) = \frac{1}{2\pi i} \Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}} \int_\Omega \int_0^\pi \int_0^\xi \oint \frac{e^{(\xi-\tau)\lambda}}{\mathscr{L}(\omega\lambda)}\, d\lambda \times$$
$$\times g(\tau)\, d\tau \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha\, |\omega_{n+1}|^k\, d\Omega \qquad (4.5.7)$$

является искомым фундаментальным решением.

Положим $\mathscr{K}(x, y) = T_x^y \mathscr{K}(x)$. Пусть $f(x)$ — финитная четная и дважды непрерывно дифференцируемая функция. И тогда свертка фундаментального решения $\mathscr{K}(x, y)$ и функции $f(x)$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \mathscr{K}(x, y) f(y)\, y_{n+1}^k\, dy$$

является решением уравнения (4.5.1). Доказательство проводится обычным путем: с помощью интегрирования по частям некоторые дифференцирования переносятся на функцию $f(y)$ и тогда после воздействия оператора $\mathscr{L}$ на свертку интеграл остается абсолютно сходящимся. Полученное выражение после несложных преобразований принимает вид разложения $f(x)$ на плоские весовые волны. Последнюю формулу можно обобщить на случай, когда функция $f(x)$ не является финитной (см. [69]).

Рассмотрим случай однородного уравнения. Пусть $\mathscr{L}(D_x; B_{x_{n+1}}) = \mathscr{L}_0(D_x; B_{x_{n+1}})$. В этом случае $\mathscr{L}(\omega\lambda) = \lambda^{2m} \mathscr{L}(\omega)$, поэтому имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{(\xi-\tau)\lambda} [\mathscr{L}(\omega\lambda)]^{-1}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\mathscr{L}(\omega)} \oint e^{(\xi-\tau)\lambda} [\lambda^{2m}]^{-1}\, d\lambda =$$

$$=\frac{1}{(2m-1)!}(\xi-\tau)^{2m-1}\mathscr{L}^{-1}(\omega).$$

Фундаментальное решение (4.5.7) теперь принимает следующий вид:

$$\mathscr{K}(x)=\frac{1}{(2m-1)!}\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}}\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\xi}(\xi-\tau)^{2m-1}g(\tau)\,d\tau\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha\,\frac{|\omega_{n+1}|^k}{\mathscr{L}(\omega)}\,d\Omega.$$

Эта формула допускает дальнейшее упрощение. Пусть $\gamma$ не является четным числом и $\gamma\leqslant 2m$. Тогда после подстановки $\tau=\xi t$ получаем

$$\mathscr{K}(x)=C_1\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^{\pi}\Big|\sum_1^n\omega_i x_i+\omega_{n+1}x_{n+1}\cos\alpha\Big|^{2m-\gamma}\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha\,\frac{|\omega_{n+1}|^k}{\mathscr{L}(\omega)}\,d\Omega.$$

Если положить $x=r\eta$, где $|\eta|=1$, то имеем

$$\mathscr{K}(x)=r^{2m-\gamma}\Omega(\eta),\tag{4.5.8}$$

где $\Omega(\eta)$ — бесконечно дифференцируемая функция, четная по $\eta_{n+1}$. К такому же виду можно привести фундаментальное решение в случае $\gamma>2m$. Если $\gamma$ — четное, то $\mathscr{K}(x)$ имеет вид

$$\mathscr{K}(x)=r^{2m-\gamma}\Omega(\eta)+P(x)\ln r,\tag{4.5.9}$$

где $P(x)$ — многочлен степени $2m-\gamma$, четный по $x_{n+1}$. При $2m<\gamma$ второе слагаемое отсутствует. Из формул (4.5.8) и (4.5.9) следует, что подобное представление допускают производные фундаментального решения.

Из этих же формул непосредственно вытекают следующие оценки фундаментального решения и его производных. Неравенство

$$|D_x^i B_{x_{n+1}}^j\mathscr{K}(x)|\leqslant\text{const}\cdot r^{2m-\gamma-i-2j}\tag{4.5.10}$$

справедливо в следующих случаях: 1) $i+2j\geqslant 0$ и $\gamma$ не является четным, либо $\gamma$ — четное и больше $2m$, 2) $i+2j>2m-\gamma$, $\gamma$ — четное и $\gamma\leqslant 2m$; если $0\leqslant i+2j\leqslant 2m-\gamma$, $\gamma$ — четное, то имеет место оценка

$$|D_x^i B_{x_{n+1}}^j\mathscr{K}(x)|\leqslant\text{const}\cdot r^{2m-\gamma-i-2j}(1+|\ln r|).\tag{4.5.11}$$

Напомним, что в предыдущей формуле $\gamma=n+k+1$.

Изучим теперь характер особенности фундаментального решения и его производных внутри полупространства $x_{n+1}>0$. Рассмотрим случай, когда фундаментальное решение имеет вид

$$\mathscr{K}(x)=r^{2m-\gamma}\Omega(\eta).$$

Имеем

$$\mathscr{K}(x,y)=T_x^y r^{2m-\gamma}(\Omega)=$$

$$=\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}\int\limits_0^{\pi}r_\alpha^{2m-\gamma}\Omega(\eta_\alpha)\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha,$$

где

$$r_\alpha=\sqrt{\sum_1^n (x_i-y_i)^2+x_{n+1}^2+y_{n+1}^2-2x_{n+1}y_{n+1}\cos\alpha},$$

$$\eta_\alpha=\left(\frac{x_1-y_1}{r_\alpha}, \ldots, \frac{x_n-y_n}{r_\alpha}, \frac{\sqrt{x_{n+1}^2+y_{n+1}^2-2x_{n+1}y_{n+1}\cos\alpha}}{r_\alpha}\right).$$

Используя равенство

$$\Omega(\eta_\alpha)=\Omega(\eta_0)+[\Omega(\eta_\alpha)-\Omega(\eta_0)],$$

и'.еем

$$\mathscr{K}(x, y)=\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}\Omega(\eta_0)\times$$

$$\times\int_0^\pi \left(\sum_1^n (x_i-y_i)^2+x_{n+1}^2+y_{n+1}^2-2x_{n+1}y_{n+1}\cos\alpha\right)^{\frac{2m-\gamma}{2}}\sin^{k-1}\alpha\, d\alpha+$$

$$+\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^\pi r_\alpha^{2m-\gamma}[\Omega(\eta_\alpha)-\Omega(\eta_0)]\sin^{k-1}\alpha\, d\alpha. \qquad (4.5.12)$$

Второе слагаемое (4.5.12) имеет более слабую особенность, чем первое. Поэтому достаточно исследовать характер особенности интеграла вида

$$\Phi(x, y)=\int_0^\pi \sin^{k-1}\alpha\, d\alpha\left[\left(\sum_1^n (x_i-y_i)^2+x_{n+1}^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+y_{n+1}^2-2x_{n+1}y_{n+1}\cos\alpha\right)^{\frac{\gamma-2m}{2}}\right]^{-1}, \qquad \gamma>2m.$$

Такой интеграл исследован А. Вайнштейном [33]. Им показано, что $\Phi$ удовлетворяет оценке

$$|\Phi(x, y)|\leqslant \text{const}\cdot r^{2m-n-1} \quad \text{для} \quad n\geqslant 2m,$$

$$|\Phi(x, y)|\leqslant \text{const}\cdot \ln|r| \quad \text{для} \quad n+1=2m.$$

Пусть теперь фундаментальное решение имеет вид (4.5.9). Так как

$$\sum_1^n (x_i-y_i)^2+x_{n+1}^2+y_{n+1}^2-2x_{n+1}y_{n+1}\cos\alpha=$$

$$=\sum_1^n (x_i-y_i)^2+(x_{n+1}-y_{n+1})^2+4x_{n+1}y_{n+1}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

и интеграл $\int_0^\pi \ln\left|\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|\sin^{k-1}\alpha\, d\alpha$ является сходящимся, то $|\mathscr{K}(x, y)|\leqslant$ $\leqslant$const. Учитывая все сказанное, мы получаем следующие оценки фундаментального решения и его производных внутри области

$(x_{n+1}>0)$:

$$D_x^i B_{x_{n+1}}^j \mathscr{K}(x, y)=O(1) \text{ при } n+1+i+2j<2m,$$
$$D_x^i B_{x_{n+1}}^j \mathscr{K}(x, y)=O(r^{2m-n-1-i-2j}) \text{ при } n+1+i+2j>2m,$$
$$D_x^i B_{x_{n+1}}^j \mathscr{K}(x, y)=O(\ln r) \text{ при } n+1+i+2j=2m.$$

Случай переменных коэффициентов исследован в [69, § 3].

## § 4.6. Эллиптическая краевая задача в полупространстве с нелокальными краевыми условиями. Постановка задачи. Регуляризатор и априорные оценки

Рассмотрим однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$\mathscr{A}\left(\frac{1}{i}D\right)=\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \left(\frac{1}{i}D\right)^\alpha,$$

где $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})=(\alpha', \alpha_{n+1})$, $\alpha_j \geqslant 0$ — целые, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}$, $\left(\frac{1}{i}D\right)^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{(i\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(i\partial x_n)^{\alpha_n}(i\partial x_{n+1})^{\alpha_{n+1}}}$. Как известно, оператор $\mathscr{A}$ называется *эллиптическим*, если

$$\mathscr{A}(\xi)=\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \xi^\alpha \neq 0$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\xi \neq 0$; $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}\xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$. Пусть выполнено условие собственной эллиптичности: характеристический полином $\mathscr{A}(\xi)=$ $=\mathscr{A}(\xi', \eta)$ комплексного переменного $\eta$ для всякого $\xi' \in R^n$, $\xi' \neq 0$ имеет $m$ корней $\eta_j^+$, $j=1, \ldots, m$, с положительной мнимой частью с учетом их кратностей.

Пусть $\mathscr{G}_j(\xi)$, $j=0, 1, \ldots, m-1$, обозначают граничные операторы с постоянными коэффициентами, причем $\mathscr{G}_j(\xi)$ — однородный полином степени $m_j \geqslant 0$.

Пусть выполнено условие Шапиро — Лопатинского: для любого $\xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi' \neq 0$ полиномы $\mathscr{G}_j(\xi', \eta)$ переменного $\eta$ линейно независимы по модулю $\mathscr{A}^+(\xi', \eta)=\prod_{j=1}^{m}(\eta-\eta_j^+(\xi'))$.

При выполнении перечисленных условий будем говорить, что операторы $\{\mathscr{A}, \mathscr{G}_j\}$, а также соответствующие им полиномы (символы) образуют эллиптический набор.

Будем рассматривать краевую задачу следующего вида:

$$\mathscr{A}\left(\frac{1}{i}D\right)u(x)=f(x), \quad x=(x', y) \in \mathbb{R}_+^{n+1};$$

$$\mathscr{G}_j\left(\frac{1}{i}D\right)D_y^k I_l^\mu u|_{y=0}=g_j(x'), \tag{4.6.1}$$

$$x \in R^n, \quad j=0, 1, \ldots, m-1,$$

где $k$ — целое неотрицательное число, а $I_e^\mu$ обозначает оператор лиувиллевского типа, введенный в § 2.2 (формула (2.2.15)) и действующий по последней переменной $y$. Число $\mu$ может быть комплексным.

После применения преобразования Фурье по первым $n$ переменным по формуле

$$\tilde{f}(\xi', y) = \mathscr{F}' f(\xi', y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x', \xi')} f(x', y)\, dx'$$

краевая задача (4.6.1) принимает вид

$$\mathscr{A}\left(\xi', \frac{1}{i} D_y\right) \tilde{u}(\xi', y) = \tilde{f}(\xi', y), \quad \xi' \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0;$$

$$\mathscr{G}_j\left(\xi', \frac{1}{i} D_y\right) D_y^k I_e^\mu \tilde{u}|_{y=0} = \tilde{g}_j(\xi'), \tag{4.6.2}$$

$$\xi' \in \mathbb{R}^n, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Пусть $s$ — целое неотрицательное число.

Лемма. 4.6.1. *Пусть операторы* $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{G}_j$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, *образуют эллиптический набор. Пусть выполнены следующие условия:*

$$k - \operatorname{Re}\mu + 1/2 > 0, \quad 2m + s - k + \operatorname{Re}\mu - \frac{1}{2} - \max_j m_j > 0. \tag{4.6.3}$$

*Пусть* $\tilde{f}(\xi', y)$ *по последней переменной принадлежит пространству* $H^s(\mathbb{R}^1_+)$. *Тогда краевая задача* (4.6.2) *при любом* $\xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi' \neq 0$ *имеет в пространстве* $H^{2m+s}(\mathbb{R}^1_+)$ *единственное решение и для него справедлива оценка*

$$c \sum_{l=0}^{2m+s} |\xi|^{2(2m+s-l)} \| D_y^l \tilde{u}(\xi', y) \|^2_{L_2(\mathbb{R}^1_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{s} |\xi'|^{2(s-l)} \| D_y^l \tilde{f}(\xi', y) \|^2_{L_2(\mathbb{R}^1_+)} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} |\xi'|^{2(2m+s-m_j-k+\operatorname{Re}\mu-1/2)} |\tilde{g}_j(\xi')|^2, \tag{4.6.4}$$

*где постоянная* $c > 0$ *не зависит от* $f$ *и* $g_j$. *Если же* $|\xi'| \geqslant 1$, *то эта постоянная не зависит от* $\xi'$.

Эту лемму можно считать известной. Доказательство ее стандартно и легко может быть восстановлено по следующей схеме. После нахождения частного решения уравнения с помощью продолжения и применения преобразования Фурье по последней переменной остается рассмотреть лишь краевую задачу с однородным уравнением. Применяя к уравнению оператор $D_y^k I_e^\mu$, получим для функции $D_y^k I_e^\mu \tilde{u}$ обычную краевую задачу, решение которой дается с помощью контурного интеграла затем применяется оператор, обратный к $D_y^k I_e^\mu$ на пространстве быстро убывающих функций, и дается прямая оценка полученного выражения, при этом надо использовать теорему 3.4.1 о следах из § 3.4.

Краевая задача (4.6.1) порождает следующий оператор:

$$\mathcal{U}\colon u \mapsto \mathcal{U}u = \{\mathcal{A}u\colon \mathcal{G}_0 D_y^k I_e^\mu u|_{y=0}, \ldots, \mathcal{G}_{m-1} D_y^k I_e^\mu u|_{y=0}\}.$$

Пусть

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^{n+1};\ \mathbb{R}^n,\ m) = H^s(R_+^{n+1}) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+s-m_j-k-\mathrm{Re}\,\mu-1/2}(R^n).$$

В пространстве $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^{n+1};\ \mathbb{R}^n,\ m)$ зададим топологию прямого произведения.

Из теоремы 3.4.1 следует, что оператор $\mathcal{U}$ непрерывно отображает $H^{s+2m}(R_+^{n+1})$ в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{n+1};\ \mathbb{R}^n,\ m)$.

Пусть $\Phi = \{f(x),\ g_0(x'),\ \ldots,\ g_{m-1}(x')\}$ — элемент пространства $\mathcal{H}^s$. *Левым регуляризатором* для $\mathcal{U}$ называется оператор $\mathcal{R}_{\text{л}}\colon \mathcal{H}^s \to H^{s+2m}$, для которого имеет место формула

$$\mathcal{R}_{\text{л}}\mathcal{U}u = u + T_{\text{л}}u,\quad u \in H^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1}),$$

в которой $T_{\text{л}}$ — сглаживающий оператор, т. е. $T_{\text{л}}\colon H^{s+2m} \to H^{s+2m+1}$. Оператор $\mathcal{R}_{\text{п}}\colon H^s \to H^{s+2m}$ называется *правым регуляризатором*, если

$$\mathcal{U}\mathcal{R}_{\text{п}}\Phi = \Phi + T_{\text{п}}\Phi,$$

где $T_{\text{п}}$ — сглаживающий оператор; под этим понимается оператор из $H^{s+2m}$ в $H^{s+2m+1}$.

Оператор $\mathcal{R}$ называется *двухсторонним регуляризатором*, если он одновременно и правый, и левый регуляризатор.

Перейдем к построению регуляризатора для оператора $\mathcal{U}$. При этом мы несколько изменим схему построения регуляризатора, примененную Л. Хёрмандером в [171]. Искомый регуляризатор мы построим следующим образом. Пусть $u(\xi', y)$ при $|\xi'| \geqslant 1$ является единственным решением краевой задачи

$$\mathcal{A}\left(\xi',\ \frac{1}{i}D_y\right)u(\xi', y) = \tilde{f}(\xi', y),\qquad y > 0;$$

$$\mathcal{G}_j\left(\xi',\ \frac{1}{i}D_y\right)D_y^k I_e^\mu u(\xi', y)|_{y=0} = \tilde{g}_j(\xi'),\tag{4.6.5}$$

$$j = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,$$

где $f(\xi', y) = \mathcal{F}'f$, $\tilde{g}_j(\xi') = \mathcal{F}g_j$ и $\mathcal{F}$ обозначает оператор Фурье по первым переменным. При $|\xi'| < 1$ функция $u(\xi', y)$ является решением задачи

$$\mathcal{A}\left(\xi_0',\ \frac{1}{i}D_y\right)u(\xi', y) = \tilde{f}(\xi', y),\qquad y > 0;$$

$$\mathcal{G}_j\left(\xi_0',\ \frac{1}{i}D_y\right)D_y^k I_e^\mu u(\xi', y)|_{y=0} = \tilde{g}_j(\xi'),\tag{4.6.6}$$

$$j = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,$$

причем $\xi_0' \in \mathbb{R}^n$ — произвольная, но фиксированная точка единичной сферы $|\xi_0'| = 1$. В отличие от схемы Л. Хёрмандера, построение регуляризатора заключается как раз в способе задания функции $u(\xi', y)$ при $|\xi'| < 1$.

Определим теперь оператор $\mathscr{R}$ по формуле

$$\mathscr{R}\Phi=(\mathscr{F}')^{-1}u, \tag{4.6.7}$$

где $\Phi=\{f, g_0, \ldots, g_{m-1}\}$. Покажем, что введенный оператор $\mathscr{R}$ непрерывно отображает пространство $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^{n+1}_+; \mathbb{R}^n, m)$ в $H^{s+2m}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Имеем

$$\|\mathscr{R}\Phi\|^2_{H^{s+2m}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}=\|(\mathscr{F}')^{-1}u\|^2_{H^{s+2m}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant c\Bigg\{\|(\mathscr{F}')^{-1}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}+$$

$$+\sum_{l=0}^{2m+s}\sum_{|\alpha'|=2m+s-l}\|D^{\alpha'}_{x'}D^l_y(\mathscr{F}')^{-1}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\Bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant c\Bigg\{\|u(\xi', y)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}+\sum_{l=0}^{2m+s}\sum_{|\alpha'|=2m+s-l}\|\xi'^{\alpha'}D^l_y u(\xi', y)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\Bigg\}.$$

Поскольку функция $u(\xi', y)$ определяется по-разному при $|\xi'|>1$ и $|\xi'|=1$, то рассмотрим сначала первый случай. Имеем, учитывая лемму 4.6.1:

$$I_1=\int\limits_{|\xi'|>1}\int\limits_0^\infty\Bigg[|u(\xi', y)|^2+$$

$$+\sum_{l=0}^{2m+s}\sum_{|\alpha'|=2m+s-l}|\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}D^l_y u(\xi', y)|^2\Bigg]d\xi'\,dy\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{l=0}^{2m+s}\int\limits_{|\xi'|>1}\int\limits_0^\infty(1+|\xi'|^2)^{2m+s-l}|D^l_y u(\xi', y)|^2\,dy\,d\xi'\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{|\xi'|>1}\Bigg\{\sum_{l=0}^{s}(1+|\xi'|^2)^{s-l}\int\limits_0^\infty|D^l_y\mathscr{F}'f(\xi', y)|^2\,dy+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}(1+|\xi'|)^{2m+s-m_j-k+\operatorname{Re}\mu-1/2}|\mathscr{F}'g_j(\xi')|^2\Bigg\}d\xi'\leqslant c\|\Phi\|^2_{\mathscr{H}^s},$$

где $c>0$ не зависит от $\Phi$.

Из определения функции $u(\xi', y)$ (см. (4.6.6)) получаем

$$I_2=\int\limits_{|\xi'|<1}\int\limits_0^\infty\Bigg\{|u(\xi'; y)|^2+\sum_{l=0}^{2m+s}\sum_{|\alpha'|=2m-s-l}|\xi'|^{\alpha'}D^l_y u(\xi', y)|^2\Bigg\}dy\,d\xi'\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{l=0}^{2m+s}\int\limits_{|\xi'|<1}\int\limits_0^\infty|D^l_y u(\xi', y)|^2\,dy\,d\xi.$$

Снова применяя лемму 4.6.1, имеем

$$I_2=c\sum_{l=0}^{s}\int\limits_{|\xi'|<1}\Bigg\{\int\limits_0^\infty|D^l_y\mathscr{F}'f(\xi', y)|^2\,dy+\sum_{j=0}^{m-1}|\mathscr{F}g_j(\xi')|^2\Bigg\}d\xi',$$

откуда следует оценка $I_2\leqslant c\|\Phi\|^2_{\mathscr{H}^s}$. Соединяя оценки для $I_1$ и $I_2$, находим, что

$$\|\mathscr{R}\Phi\|_{H^{s+2m}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant c\,\|\Phi\|_{\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^{n+1}_+, \mathbb{R}^n, m)}.$$

Таким образом, непрерывность $\mathscr{R}$ доказана.

Проверим, что оператор $\mathscr{R}$ является левым регуляризатором. Имеем

$$\mathscr{R}\mathscr{U}u=u+\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{|\xi'|<1} e^{i(x',\xi')}v(\xi',y)\,d\xi=u+T_л u, \tag{4.6.8}$$

где функция $v(\xi',y)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\mathscr{A}\left(\xi_0',\frac{1}{i}D_y\right)v(\xi',y)=\left[\mathscr{A}\left(\xi_0',\frac{1}{i}D_y\right)-\right.$$
$$\left.-\mathscr{A}\left(\xi',\frac{1}{i}D_y\right)\right]\mathscr{F}'u(\xi',y),\qquad y>0;$$

$$\mathscr{G}_j\left(\xi_0',\frac{1}{i}D_y\right)D_y^k I_e^\mu v|_{y=0}= \tag{4.6.9}$$
$$=\left[\mathscr{G}_j\left(\xi_0',\frac{1}{i}D_y\right)-\mathscr{G}\left(\xi',\frac{1}{i}D_y\right)\right]D_y^k I_e^\mu \mathscr{F}'u(\xi',y)|_{y=0},$$
$$j=0,1,\ldots,m-1.$$

Здесь $T_л u=(\mathscr{F}')^{-1}v_1$, где $v_1(\xi',y)=v(\xi',y)$, если $|\xi'|<1$, $v_1(\xi',y)=0$, если $|\xi'|>1$. Отсюда

$$\|T_л u\|_{H^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\leqslant c\sum_{l=0}^{2m+s}\int\limits_{|\xi'|<1}\int\limits_0^\infty |D_y^l v(\xi',y)|^2\,dy\,d\xi'.$$

Применяя оценку 4.6.1 к функции $v$ и замечая, что операторы, стоящие в квадратных скобках (4.6.9), имеют одинаковую главную часть, получаем

$$\|T_л u\|^2_{H^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\leqslant C\left\{\sum_{l=0}^{s}\int\limits_{|\xi'|<1}\|D_y^{l+2m-1}\mathscr{F}'u(\xi',y)\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}\,d\xi'+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=0}^{m_j-1}\sum_{j=0}^{s-1}\int\limits_{|\xi'|<1}|D_y^{l+k}I_e^\mu\mathscr{F}'u(\xi',y)|_{y=0}|^2\,d\xi'\right\}.$$

Первая сумма оценивается нормой $\|u\|_{H^{s+2m-1}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$. Вторая сумма также может быть оценена той же нормой. Это следует из теоремы 3.4.1. Таким образом, доказана оценка

$$\|T_л u\|_{H^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\leqslant C\|u\|_{H^{s+2m-1}(\mathbb{R}_+^{n+1})},$$

в которой $C$ не зависит от $u$.

То, что оператор $\mathscr{R}$ является правым регуляризатором, доказывается аналогично.

Итак, доказана

Теорема 4.6.1. *Пусть операторы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{G}_j$, $j=0,1,\ldots,m-1$, образуют эллиптический набор. Пусть выполнены неравенства*

$$k-\operatorname{Re}\mu+1/2>0,\quad s+2m-k+\operatorname{Re}\mu-1/2-\max_j m_j>0.$$

*Тогда для оператора $\mathcal{U}$ существует регуляризатор $\mathcal{R}$, принадлежащий $\mathcal{L}(\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{n+1}_+;\ \mathbb{R}^n,\ m),\ H^{s+2m}(\mathbb{R}^{n+1}_+))$. Если $u\in H^{s+2m}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, а $\mathcal{U}u\in\mathcal{H}^{s+\delta}$ при некотором $\delta>0$, то $u\in H^{2m+s+\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, и справедлива априорная оценка*

$$c\,\|u\|_{H^{s+2m}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leqslant\|\mathcal{A}u\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1}_+)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\|\mathcal{G}_j D_y^k I_e^{\mu}u|_{y=0}\|_{H^{\lambda_j}(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{H^{s+2m-1}(\mathbb{R}^{n+1}_+)},$$

*в которой $c$ не зависит от функции $u$, $\lambda_j=s+2m-m_j-k+\operatorname{Re}\mu-1/2$.*

## § 4.7. Весовая краевая задача в полупространстве. Постоянные коэффициенты

Рассмотрим в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ уравнение

$$\mathcal{A}\left(\frac{1}{i}D_{x'},\ \frac{1}{i^2}B_y\right)u\equiv\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}=2m}a_\alpha\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}}u(x)=f(x),\quad(4.7.1)$$

где $B_y$ — оператор Бесселя с комплексным параметром $\nu$, $x=(x',\ y)=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ y)$. На гиперплоскости $y=0$ рассмотрим два типа краевых условий:

$$\sigma_\nu(y)\mathcal{G}_j\left(\frac{1}{i}D_{x'},\ \frac{1}{i^2}B_y\right)B_y^k u|_{y=0}=g_j(x'),\qquad j=0,\ 1,\ \dots,\ m-1,\quad(4.7.2)$$

если $\operatorname{Re}\nu>0$ или $\nu=0$, и

$$y^{2\nu+1}D_y\mathcal{G}_j\left(\frac{1}{i}D_{x'},\ \frac{1}{i^2}B_y\right)B_y^k u|_{y=0}=g_j(x'),\ j=0,\ 1,\ \dots,\ m-1,\quad(4.7.3)$$

если $\operatorname{Re}\nu\geqslant0$, $\nu\neq0$. Операторы $\mathcal{G}_j$, $j=0,\ 1,\ \dots,\ m-1$, имеют следующий вид:

$$\mathcal{G}_j\left(\frac{1}{i}D_{x'},\ \frac{1}{i^2}B_y\right)=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}=m_j}g_{\alpha_j}\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}}.$$

По поводу определения функции $\sigma_\nu(y)$ см. § 3.4. Указанные краевые задачи порождают операторы $\mathcal{U}_\nu$ и $\mathcal{U}'_\nu$, определяемые формулами

$$\mathcal{U}_\nu u=\{\mathcal{A}u,\sigma_\nu\mathcal{G}_0B_y^k u|_{y=0},\dots,\sigma_\nu\mathcal{G}_{m-1}B_y^k u|_{y=0}\},$$

$$\mathcal{U}'_\nu u=\{\mathcal{A}u,y^{2\nu+1}D_y\mathcal{G}_0B_y^k u|_{y=0},\dots,y^{2\nu+1}D_y\mathcal{G}_{m-1}B_y^k u|_{y=0}\}.$$

Нашей задачей является построение регуляризаторов для $\mathcal{U}_\nu$, $\mathcal{U}'_\nu$. Это построение будет осуществляться методом операторов преобразования.

Введем пространство

$$\mathcal{H}^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+,\mathbb{R}^n,m)=H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)\times\prod_{j=0}^{m-1}H^{2m+s-m_j-2k-1+\operatorname{Re}\nu}(\mathbb{R}^n)$$

и снабдим его топологией прямого произведения.

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$2k+1-\operatorname{Re}\nu>0,\ s+2m-2k-1+\operatorname{Re}\nu-\max_j m_j>0. \tag{4.7.4}$$

Тогда из результатов § 3.1—3.4 следует, что операторы $\mathcal{U}_\nu$, $\mathcal{U}'_\nu$ непрерывно отображают пространства $H_\nu^{s+2m}(\mathbb{R}_\nu^{n+1})$ в $\mathcal{H}_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n, m)$.

Ниже мы изучим подробно лишь оператор $\mathcal{U}_\nu$, поскольку оператор $\mathcal{U}'_\nu$ исследуется аналогично. Наряду с оператором $\mathcal{U}_\nu$ рассмотрим оператор $\mathcal{U}$, определенный по формуле

$$\mathcal{U}u=\left\{\mathcal{A}\left(\frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}D_y^2\right),\ \mathcal{G}_0\left(\frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}D_y^2\right)D_y^{2k}I_e^{\nu-1/2}u|_{y=0}, \dots\right.$$

$$\left.\dots, \mathcal{G}_{m-1}\left(\frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}D_y^2\right)D_y^{2k}I_e^{\nu-1/2}u|_{y=0}\right\}.$$

Этот оператор был нами изучен в предыдущем параграфе, где было показано, что он непрерывно отображает пространство $H^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ в пространство

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n, m)=H^s(\mathbb{R}_+^{n+1})\times\prod_{j=0}^{m-1}H^{s+2m-m_j-2k+\operatorname{Re}\nu-1}(\mathbb{R}^n),$$

наделенное топологией прямого произведения.

Введем операторы преобразования $\mathcal{B}_{\nu,e}$ и $\sigma_{\nu,e}$, связанные с изучаемой краевой задачей. При этом мы лишь расширим теперь области определения операторов преобразования $\mathcal{P}_{\nu,e}$ и $S_{\nu,e}$, введенных в изученных в § 2.1—2.5 и 3.1—3.4. Обозначим через $\Phi$ следующий набор функций: $\Phi=\{f, g_0, \dots, g_{m-1}\}$. Тогда положим

$$\mathcal{B}_{\nu,e}\Phi=\{\mathcal{P}_{\nu,e}f, c_\nu g_0, \dots, c_\nu g_{m-1}\},$$

$$\sigma_{\nu,e}\Phi=\left\{S_{\nu,e}f, \frac{1}{c_\nu}g_0, \dots, \frac{1}{c_\nu}g_{m-1}\right\},$$

где постоянная $c_\nu=2\nu$ при $\operatorname{Re}\nu>0$ и $c_0=1$ при $\nu=0$. Операторы $\mathcal{P}_{\nu,e}$ и $S_{\nu,e}$ имеют соответственно следующий вид (см. гл. II):

$$\mathcal{P}_{\nu,e}f(x',y)=-\sqrt{\pi}\cdot\left[2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)\right]^{-1}\times y^{-\nu-1/2}\int_y^\infty\frac{\partial}{\partial t}f(x',t)P_{\nu-1/2}^0\left(\frac{t}{y}\right)dt,$$

$$S_{\nu,e}f(x',y)=-2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)/\sqrt{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_y^\infty t^{\nu+1/2}f(x',t)P_{\nu-1/2}^0\left(\frac{y}{t}\right)dt.$$

Оператор $\mathcal{B}_{\nu,e}$ изоморфно отображает пространство $\mathcal{H}^s$ в $\mathcal{H}_\nu^s$, а оператор $\sigma_{\nu,e}$ осуществляет обратное отображение.

Заметим теперь, что операторы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_\nu$ связаны следующими простыми соотношениями:

$$\mathcal{U}_\nu=\mathcal{B}_{\nu,e}\mathcal{U}S_{\nu,e},\quad \mathcal{U}=\sigma_{\nu,e}\mathcal{U}_\nu\mathcal{P}_{\nu,e}.$$

Наличие такого соотношения позволяет построить регуляризатор $\mathcal{R}_\nu$ оператора $\mathcal{U}_\nu$ по формуле

$$\mathcal{R}_\nu = \mathcal{P}_{\nu,e}\mathcal{R}\,\sigma_{\nu,e},$$

где $\mathcal{R}$ — регуляризатор оператора $\mathcal{U}$, построенный в § 4.6 при условии, что операторы $\mathcal{A}\left(\frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}D_y^2\right)$, $\mathcal{G}_j\left(\frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}D_y^2\right)$ образуют эллиптический набор. Покажем, что оператор $\mathcal{R}_\nu$ действительно является регуляризатором. Имеем

$$\mathcal{U}_\nu\mathcal{R}_\nu = \mathcal{B}_{\nu,e}\mathcal{U}S_{\nu,e}\mathcal{P}_{\nu,e}\mathcal{R}\sigma_{\nu,e} = \mathcal{B}_{\nu,e}\mathcal{U}\mathcal{R}\sigma_{\nu,e} = \mathcal{B}_{\nu,e}(I+T_{\text{п}})\sigma_{\nu,e} = I + T_{\text{п},\nu},$$

где $T_{\text{п},\nu} = \mathcal{B}_{\nu,e}T_{\text{п}}\sigma_{\nu,e}$. Так как $T_{\text{п}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s\mathcal{H}^{s+1})$, то $T_{\text{п},\nu} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s_\nu, \mathcal{H}^{s+1}_\nu)$. Аналогично получаем

$$\mathcal{R}_\nu\mathcal{U}_\nu = I + T_{\text{л},\nu}, \quad T_{\text{л},\nu} = \mathcal{P}_{e,\nu}T_{\text{л}}S_{\nu,e},$$

и так как

$$T_{\text{л}} \in \mathcal{L}\left(H^{s+2m}(\mathbb{R}^{n+1}_+), H^{s+2m+1}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\right),$$

то $T_{\text{л},\nu} \in \mathcal{L}\left(H^{s+2m}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+), H^{s+2m+1}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)\right)$. Таким образом, доказана

Теорема 4.7.1. *Пусть операторы* $\mathcal{A}\left(\frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}D_y^2\right)$, $\mathcal{G}_j\left(\frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}D_y^2\right)$ *образуют эллиптический набор. Пусть выполнены условия* (4.7.4). *Тогда операторы* $\mathcal{U}_\nu$ *и* $\mathcal{U}'_\nu$ *имеют регуляризаторы, непрерывно отображающие пространства* $\mathcal{H}^s_\nu$ *в* $H^{s+2m}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *при всех допустимых* $\nu$.

## § 4.8. Весовая краевая задача в полупространстве. Переменные коэффициенты

Рассмотрим в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ следующее сингулярное эллиптическое уравнение в частных производных:

$$\mathcal{A}\left(x, \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)u = \sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}\leqslant 2m} a_\alpha(x)\left(\frac{1}{i^2}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i}B_y\right)^{\alpha_{n+1}} u = f(x). \quad (4.8.1)$$

В случае $\operatorname{Re}\nu > 0$ или $\nu = 0$ присоединим к уравнению (4.8.1) следующие краевые условия:

$$\sigma_\nu(y)\mathcal{G}_j\left(x', \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)B_y^k u|_{y=0} =$$

$$= \sigma_\nu(y)\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}\leqslant m_j} g_{\alpha_j}(x')\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}} B_y^k u|_{y=0} =$$

$$= g_j(x'), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \quad (4.8.2)$$

При $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$, $\nu \neq 0$, будем рассматривать также краевые условия вида:

$$y^{2\nu+1}D_y\mathcal{G}_j\left(x', \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)B_y^k u|_{y=0} = g_j(x'), \quad (4.8.3)$$

$$j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Относительно коэффициентов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{G}_j$ будем предполагать, что они бесконечно дифференцируемы и, кроме того, пусть $D_y^p a_\alpha(x', 0) = 0$ при $p = 1, 2$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) многочлены $\mathscr{A}(0, \xi', \eta^2)$ и $\mathscr{G}_j(0, \xi', \eta^2)$ образуют эллиптический набор, т. е. удовлетворяют условию Шапиро — Лопатинского;

2) при $|\alpha'| = 2\alpha_{n+1} = 2m$ и $x \in \overline{R_+^{n+1}}$ выполняются неравенства $|\alpha(x) - \alpha(0)| < \varepsilon$, $\left|\left(\frac{1}{y} D_y\right)^p a_\alpha(x)\right| < \varepsilon$, $1 \leqslant p \leqslant 3 \operatorname{Re} \nu + s + 1$;

3) существует такое $R$, что при $|x| > R$ и при $|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} = 2m$, $a_\alpha(x) = a_\alpha(0)$;

4) при $|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} < 2m$ коэффициенты $a_\alpha(x) \in \overset{0}{C}{}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$;

5) при $j = 0, 1, \ldots, m-1$, $|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} = m_j$ и при всех $x' \in R^n$ $|g_{\alpha_j}(x') - g_{\alpha_j}(0)| < \varepsilon$;

6) при $j = 0, 1, \ldots, m-1$, $|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} = m_j$ и при $|x'| > R$ $g_{\alpha_j}(x') = g_{\alpha_j}(0)$;

7) при $j = 0, 1, \ldots, m-1$, $|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} < m_j$ коэффициенты $g_{\alpha_j} \in \overset{0}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Определим операторы $\mathscr{U}_\nu$ и $\mathscr{U}'_\nu$ соответственно по формулам

$$\mathscr{U}_\nu u = \{\mathscr{A} u, \sigma_\nu \mathscr{G}_0 B_y^k u|_{y=0}, \ldots, \sigma_\nu \mathscr{G}_{m-1} B_y^k u|_{y=0}\},$$

$$\mathscr{U}'_\nu u = \{\mathscr{A} u, y^{2\nu+1} D_y \mathscr{G}_0 B_y^k u|_{y=0}, \ldots, y^{2\nu+1} D_y \mathscr{G}_{m-1} B_y^k u|_{y=0}\}.$$

При выполнении условий 1)—7) операторы $\mathscr{U}_\nu$ и $\mathscr{U}'_\nu$ будем называть сингулярными эллиптическими операторами с маломеняющимися коэффициентами. Ниже при достаточно малых $\varepsilon$ для них будут построены регуляризаторы. При этом мы изучим подробно только оператор $\mathscr{U}_\nu$, поскольку $\mathscr{U}'_\nu$ изучается аналогично.

Имея в виду применение метода возмущений, разобьем оператор $\mathscr{U}_\nu$ на сумму трех слагаемых: оператор с постоянными коэффициентами, $\mathscr{U}_{\nu,0}$, оператор с малыми коэффициентами $\mathscr{U}_{\nu,1}$ и оператор $\mathscr{U}_{\nu,2}$, содержащий лишь младшие члены. Таким образом, мы полагаем

$$\mathscr{U}_{\nu,0} u = \left\{\mathscr{A}\left(0, \frac{1}{i} D_{x'}, \frac{1}{i^2} B_y\right) u, \sigma_\nu(y) \mathscr{G}_{0,0}\left(0, \frac{1}{i} D_{x'}, \frac{1}{i^2} B_y\right) B_y^k u|_{y=0}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \sigma_\nu(y) \mathscr{G}_{m-1,0}\left(0, \frac{1}{i} D_{x'}, \frac{1}{i^2} B_y\right) B_y^k u|_{y=0}\right\},$$

где

$$\mathscr{A}_0\left(0, \frac{1}{i} D_{x'}, \frac{1}{i^2} B_y\right) = \sum_{|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} = 2m} a_\alpha(0) \left(\frac{1}{i} D_{x'}\right)^{\alpha'} \left(\frac{1}{i^2} B_y\right)^{\alpha_{n+1}},$$

$$\mathscr{G}_{j,0}\left(0, \frac{1}{i} D_{x'}, \frac{1}{i^2} B_y\right) = \sum_{|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} = m_j} g_{\alpha_j}(0) \left(\frac{1}{i} D_{x'}\right)^{\alpha'} \left(\frac{1}{i^2} B_y\right)^{\alpha_{n+1}},$$

$$j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Оператор $\mathscr{U}_{\nu,1}$ имеет вид

$$\mathscr{U}_{\nu,1} u = \left\{\mathscr{A}_1\left(x, \frac{1}{i} D_{x'}, \frac{1}{i^2} B_y\right) u, \sigma_\nu(y) \mathscr{G}_{0,1}\left(x', \frac{1}{i} D_{x'}, \frac{1}{i^2} B_y\right) B_y^k u|_{y=0}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \sigma_\nu(y) \mathscr{G}_{m-1,1}\left(x', \frac{1}{i} D_{x'}, \frac{1}{i^2} B_y\right) B_y^k u|_{y=0}\right\},$$

$$\mathscr{A}_1\left(x, \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}=2m}[a_\alpha(x)-a_\alpha(0)]\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}},$$

$$\mathscr{G}_{j,1}=\left(x', \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}=m_j}[g_{\alpha_j}(x)-g_{\alpha_j}(0)]\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}},$$

$$j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1.$$

Оператор $\mathscr{U}_{\nu,2}$ определяется по формуле

$$\mathscr{U}_{\nu,2}u=\left\{\mathscr{A}_2\left(x,\ \frac{1}{i}D_{x'},\ \frac{1}{i^2}B_y\right)u,\ \sigma_\nu(y)\mathscr{G}_{0,2}\left(x',\ \frac{1}{i}D_{x'},\ \frac{1}{i^2}B_y\right)B_y^k u|_{y=0}, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\ \sigma_\nu(y)\mathscr{G}_{m-1,2}\left(x',\ \frac{1}{i}D_{x'},\ \frac{1}{i^2}B_y\right)B_y^k u|_{y=0}\right\},$$

где

$$\mathscr{A}_2\left(x, \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}\leqslant 2m-1}a_\alpha(x)\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}},$$

$$\mathscr{G}_{j,2}\left(x, \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}\leqslant m_j-1}g_{\alpha_j}(x')\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}},$$

причем в последнем соотношении предполагается, что $m_j\geqslant 1$. Если $m_j=0$ при некотором $j$, то мы полагаем $\mathscr{G}_{j,2}=0$. Следовательно,

$$\mathscr{U}_\nu=\mathscr{U}_{\nu,0}+\mathscr{U}_{\nu,1}+\mathscr{U}_{\nu,2}. \tag{4.8.4}$$

Во всем дальнейшем предполагается выполнение (4.7.4). Оператор $\mathscr{U}_{\nu,0}$ порожден краевой задачей с однородным оператором с постоянными коэффициентами как в уравнении, так и в граничных условиях. Для таких операторов в предыдущем пункте был построен регуляризатор, который здесь мы обозначаем через $\mathscr{R}_{\nu,0}$. По доказанному (см. § 4.7) оператор $\mathscr{R}_{\nu,0}\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n, m), H_\nu^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1}))$. Для него имеем

$$\mathscr{U}_{\nu,0}\mathscr{R}_{\nu,0}=I+T_{\text{п},0},\quad \mathscr{R}_{\nu,0}\mathscr{U}_{\nu,0}=I+T_{\text{л},0}, \tag{4.8.5}$$

где через $I$ обозначен тождественный оператор, а операторы $T_{\text{п},0}$ и $T_{\text{л},0}$ — сглаживающие, т. е.

$$T_{\text{п},0}\in\mathscr{L}(H_\nu^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1}), H_\nu^{s+2m+1}(\mathbb{R}_+^{n+1})),$$

$$T_{\text{л},0}\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_\nu^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1}, R^n, m), \mathscr{H}_\nu^{s+2m+1}(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n, m)).$$

Отсюда из разложения (4.8.4) получаем

$$\mathscr{U}_\nu\mathscr{R}_{\nu,0}=I+T_{\text{п},0}+\mathscr{U}_{\nu,1}\mathscr{R}_{\nu,0}+\mathscr{U}_{\nu,2}\mathscr{R}_{\nu,0}, \tag{4.8.6}$$

$$\mathscr{R}_{\nu,0}\mathscr{U}_\nu=I+T_{\text{л},0}+\mathscr{R}_{\nu,0}\mathscr{U}_{\nu,1}+\mathscr{R}_{\nu,0}\mathscr{U}_{\nu,2}. \tag{4.8.7}$$

Ниже мы покажем, что операторы $I+\mathscr{U}_{\nu,1}\mathscr{R}_{\nu,0}$ и $I+\mathscr{R}_{\nu,0}\mathscr{U}_{\nu,1}$ имеют ограниченные обратные в соответствующих пространствах. Тогда вводя обозначения

$$\mathscr{R}_{\nu,0}(I+\mathscr{U}_{\nu,1}\mathscr{R}_{\nu,0})^{-1}=\mathscr{R}_\nu \tag{4.8.8}$$

и замечая, что

$$\mathscr{R}_{\nu,0}(I+\mathscr{U}_{\nu,1}\mathscr{R}_{\nu,0})^{-1}=(I+\mathscr{R}_{\nu,0}\mathscr{U}_{\nu,1})^{-1}\mathscr{R}_{\nu,0}, \tag{4.8.9}$$

формулы (4.8.6) и (4.8.7) преобразуются к виду

$$\mathscr{U}_\nu \mathscr{R}_\nu = I + \left(T_{\text{п},0} + \mathscr{U}_{\nu,2}\mathscr{R}_{\nu,0}\right)\left(I + \mathscr{U}_{\nu,1}\mathscr{R}_{\nu,0}\right)^{-1} = I + T_{\text{п}}, \qquad (4.8.10)$$

$$\mathscr{R}_\nu \mathscr{U}_\nu = I + \left(I + \mathscr{R}_{\nu,0}\mathscr{U}_{\nu,1}\right)^{-1}\left(T_{\text{л},0} + \mathscr{R}_{\nu,0}\mathscr{U}_{\nu,2}\right) = I + T_{\text{л}}, \qquad (4.8.11)$$

причем операторы $T_{\text{п}}$ и $T_{\text{л}}$ оказываются сглаживающими.

Для построения обратного к оператору $I + \mathscr{U}_{\nu,1}\mathscr{R}_{\nu,0}$ достаточно доказать сходимость в соответствующей операторной топологии ряда Неймана, стоящего в правой части следующей формулы:

$$\left(I + \mathscr{U}_{\nu,1}\mathscr{R}_{\nu,0}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\mathscr{U}_{\nu,1}\mathscr{R}_{\nu,0}\right)^k. \qquad (4.8.12)$$

Пусть $\Phi = \{f, g_0, \ldots, g_{m-1}\} \in \mathscr{H}^s_\nu$. Положим временно $u = \mathscr{R}_{\nu,0}\Phi$. Тогда $u \in H^{s+2m}_\nu\left(\mathbb{R}^{n+1}_+\right)$ и

$$\|\mathscr{U}_{\nu,1}\mathscr{R}_{\nu,0}\Phi\|^2_{\mathscr{H}^s_\nu} = \|\mathscr{U}_{\nu,1}u\|^2_{\mathscr{H}^s_\nu} = \|\mathscr{A}_1 u\|^2_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{m-1}\|\sigma_\nu \mathscr{G}_{j,1}B^k_y u|_{y=0}\|^2_{H^{s+2m-m_j-2k+\operatorname{Re}\nu-1}(\mathbb{R}^n)}. \qquad (4.8.13)$$

Оценим каждое слагаемое этой формулы. Постоянные, которые не зависят от $\mathscr{U}_{\nu,1}$ и $\Phi$, обозначим через $c_j$, $j = 1, 2, \ldots$ Из условий 2) и 3) и следствия 3.3.1 непосредственно находим

$$\|\mathscr{A}_1 u\|_{\overset{\circ}{H}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leqslant c_1 \varepsilon \|u\|_{H^{2m}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)}. \qquad (4.8.14)$$

Для $s > 0$ по формуле Лейбница имеем

$$\|\mathscr{A}_1 u\|^2_{H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)} = \sum_{|\alpha'|+\alpha_{n+1}\leqslant s}\|D^{\alpha'}_{x'}D^{\alpha_{n+1}}_y S_{\nu,l}\mathscr{A}_1 u\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant$$
$$\leqslant c_2\left\{\sum_{|\alpha'|+\alpha_{n+1}\leqslant s}\|D^{\alpha_{n+1}}_y S_{\nu,l}\left(\mathscr{A}_1 D^{\alpha'}_{x'}u\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{|\alpha'|+\alpha_{n+1}\leqslant s,\ |\alpha'|>0}\|D^{\alpha_{n+1}}_y S_{\nu,l}\mathscr{A}^{(\alpha')}_1 u\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\right\},$$

где

$$\mathscr{A}^{(\alpha')}_1 u = D^{\alpha'}_{x'}\mathscr{A}_1 u - \mathscr{A}_1 D^{\alpha'}_{x'}u =$$
$$= \sum_{\substack{|\gamma'|+|\delta'|=|\alpha'| \\ |\delta'|>0}}\ \sum_{|\beta'|+2\beta_{n+1}=2m} c(\delta', \gamma')D^{\delta'}_{x'}a_\beta(x) \times D^{\beta'+\gamma'}_{x'}B^{\beta_{n+1}}_y u,$$

$c(\delta', \gamma')$ — вполне определенные постоянные. Порядок оператора $\mathscr{A}^{(\alpha')}_1$ не превосходит $2m + |\alpha'| - 1$, поэтому, оценивая слагаемые в соответствии с теоремой 3.3.1, получаем

$$\|D^{\alpha_{n+1}}_y S_{\nu,l}\left(\mathscr{A}_1 D^{\alpha'}_{x'}u\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leqslant c_3\|u\|_{H^{s+2m}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \times$$
$$\times \max_{l\leqslant\alpha_{n+1}+3N+1}\ \sup_x\left|\left(\frac{1}{y}D_y\right)^l\left(a_\alpha(x) - a_\alpha(0)\right)\right| \leqslant c_3\varepsilon\|u\|_{H^{s+2m}_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)},$$

и, кроме того,

$$\| D_y^{\alpha_{n+1}} S_{\nu,l} \mathscr{A}_1^{(\alpha')} u \|_{L_2(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \| u \|_{H_\nu^{s+2m-1}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \max_{\substack{0 \leqslant l \leqslant 3N+\alpha_{n+1}+1 \\ 0<|\delta'| \leqslant |\alpha'|}} \sup_x \left| D_{x'}^{\delta'} \left( \frac{1}{y} D_y \right) a_\alpha(x) \right|.$$

Окончательно имеем

$$\| \mathscr{A}_1 u \|_{H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leqslant c_5 \varepsilon \| u \|_{H_\nu^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + c_6 M_s(a) \| u \|_{H_\nu^{s+2m-1}(\mathbb{R}_+^{n+1})}, \tag{4.8.15}$$

где положено

$$M_s(a) = \max_{0<|\beta| \leqslant 3N+s+1} \max_{|\alpha|=2m} \sup_{x \in \mathbb{R}_+^{n+1}} \left| D_{x'}^{\beta'} \left( \frac{1}{y} D_y \right)^{\beta_{n+1}} a_\alpha(x) \right|, \tag{4.8.16}$$

$N$ — натуральное число такое, что $\operatorname{Re} \nu < N + 1/2$. По теореме 3.4.2 о весовых следах существует не зависящая от операторов $\mathscr{G}_{j,1}$ и функции $u(x)$ постоянная $c_7 > 0$ такая, что

$$\| \sigma_\nu \mathscr{G}_{j,1} B_y^k u |_{y=0} \|_{H^{s+2m-m_j-2k+\operatorname{Re}\nu-1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_7 \| \mathscr{G}_{j,1} u \|_{H^{s+2m-m_j}(\mathbb{R}_+^{n+1})}. \tag{4.8.17}$$

Коэффициенты операторов $\mathscr{G}_{j,1}$ не зависят от последней переменной. Тогда из условий 5), 6) немедленно получаем

$$\| \mathscr{G}_{j,1} u \|_{\overset{\circ}{H}_\nu(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leqslant c_8 \varepsilon \| u \|_{H_\nu^{m_j}(\mathbb{R}_+^{n+1})}.$$

Отсюда при $s > m_j - 2m$ по формуле Лейбница имеем

$$\| \mathscr{G}_{j,1} u \|_{H_\nu^{s+2m-m_j}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leqslant c_9 \varepsilon \| u \|_{H_\nu^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1})} +$$

$$+ c_{10} M_s(g_j) \| u \|_{H_\nu^{s+2m-1}(\mathbb{R}_+^{n+1})}, \tag{4.8.18}$$

где

$$M_s(g_j) = \max_{0<|\beta'| \leqslant s+2m-m_j} \max_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}=m_j} \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} |D_{x'}^{\beta'} g_{\alpha_j}(x')|. \tag{4.8.19}$$

Заметим, что $u = \mathscr{R}_{\nu,0} \Phi$; поэтому из (4.8.15), (4.8.17), (4.8.18) получаем

$$\| \mathscr{U}_{\nu,1} \mathscr{R}_{\nu,0} \Phi \|_{\mathscr{H}_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n, m)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{11} \varepsilon \| \mathscr{R}_{\nu,0} \Phi \|_{H_\nu^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + c_{12} M_s \| \mathscr{R}_{\nu,0} \Phi \|_{H_\nu^{s+2m-1}(\mathbb{R}_+^{n+1})},$$

где $M_s = \max(M_s(a), M_s(g_0), \ldots, M_s(g_{m-1}))$. Обозначим через $R_s$ норму ограниченного оператора $\mathscr{R}_{\nu,0}$, действующего из $\mathscr{H}_\nu^s$ в $H_\nu^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$\| \mathscr{U}_{\nu,1} \mathscr{R}_{\nu,0} \Phi \|_{\mathscr{H}_\nu^s} \leqslant c_{11} \varepsilon R_s \| \Phi \|_{\mathscr{H}_\nu^s} + c_{12} M_s R_s \| \Phi \|_{\mathscr{H}_\nu^{s-1}}. \tag{4.8.20}$$

Заменяя в этом неравенстве $\Phi$ на $\mathscr{U}_{\nu,1} \mathscr{R}_{\nu,0} \Phi$, имеем

$$\| (\mathscr{U}_{\nu,1} \mathscr{R}_{\nu,0})^2 \Phi \|_{\mathscr{H}_\nu^s} \leqslant c_{11} \varepsilon R_s \| \mathscr{U}_{\nu,1} \mathscr{R}_{\nu,0} \Phi \|_{\mathscr{H}_\nu^s} +$$

$$+ c_{12} M_s R_s \| \mathscr{U}_{\nu,1} \mathscr{R}_{\nu,0} \Phi \|_{\mathscr{H}_\nu^{s-1}}. \tag{4.8.21}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части. Используя неравенство Эрлинга—Ниренберга и неравенства (4.8.14) и (4.8.17), находим

$$\|\mathcal{U}_{\nu,1}\mathcal{R}_{\nu,0}\Phi\|_{\mathcal{H}_\nu^{s-1}}\leqslant\|\mathcal{A}_1\mathcal{R}_{\nu,0}\Phi\|_{\mathcal{H}_\nu^{s-1}(\mathbb{R}_+^{n+1})}+$$

$$+c_{13}\sum_{j=0}^{m-1}\|\mathcal{G}_{j,1}\mathcal{R}_{\nu,0}\Phi\|_{H^{s+2m-m_j-1}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\leqslant\varepsilon_1\|\mathcal{A}_1\mathcal{R}_{\nu,0}\Phi\|_{H_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1})}+$$

$$+c(\varepsilon_1)\|\mathcal{A}_1\mathcal{R}_{\nu,0}\Phi\|_{H_\nu^0(\mathbb{R}_+^{n+1})}+\varepsilon_1\sum_{j=0}^{m-1}\|\mathcal{G}_{j,1}\mathcal{R}_{\nu,0}\Phi\|_{H_\nu^{s+2m-m_j}(\mathbb{R}_+^{n+1})}+$$

$$+c(\varepsilon_1)\sum_{j=0}^{m-1}\|\mathcal{G}_{j,1}\mathcal{R}_{\nu,0}\Phi\|_{H_\nu^0(\mathbb{R}_+^{n+1})}\leqslant(c_{14}\varepsilon_1+\varepsilon c(\varepsilon_1))R_s\|\Phi\|_{\mathcal{H}_\nu^s},$$

где $\varepsilon_1$ — произвольное положительное число, а $c(\varepsilon_1)$ зависит от $\varepsilon_1$. В сочетании с неравенствами (4.8.20) и (4.8.21) это приводит нас к оценке

$$\|(\mathcal{U}_{\nu,1}\mathcal{R}_{\nu,0})^2\Phi\|_{\mathcal{H}_\nu^s}\leqslant c_{15}R_s^2M_s(\varepsilon_1+\varepsilon)\|\Phi\|_{\mathcal{H}_\nu^s}. \tag{4.8.22}$$

Выберем $\varepsilon_1$ так, чтобы $c_{15}R_s^2M_s\varepsilon_1=1/2$, и предположим, что $c(\varepsilon_1)c_{15}R_s^2M_s\varepsilon<1/2$. Если $\varepsilon$ удовлетворяет этому условию, то

$$\|(\mathcal{U}_{\nu,1}\mathcal{R}_{\nu,0})^2\Phi\|_{\mathcal{H}_\nu^s}\leqslant q\|\Phi\|_{\mathcal{H}_\nu^s},$$

где $0<q<1$. Тогда оператор $(\mathcal{U}_{\nu,1}\mathcal{R}_{\nu,0})^2$ является сжимающим. Этого достаточно для сходимости ряда Неймана (4.8.12) в банаховом пространстве линейных ограниченных в $\mathcal{H}_\nu^s$ операторов. Следовательно, оператор $(I+\mathcal{U}_{\nu,1}\mathcal{R}_{\nu,0})^{-1}$ определен и непрерывен в $\mathcal{H}_\nu^s$. Осталось только заметить, что оператор $\mathcal{R}_\nu$, определенный по формуле

$$\mathcal{R}_\nu=\mathcal{R}_{\nu,0}(I+\mathcal{U}_{\nu,1}\mathcal{R}_{\nu,0})^{-1},$$

в связи с формулами (4.8.9)—(4.8.11) является регуляризатором для оператора $\mathcal{U}_\nu$, так как операторы $T_{\text{п}}$ и $T_{\text{л}}$, очевидно, сглаживающие.

Стало быть, доказана

Теорема 4.8.1. *Пусть операторы $\mathcal{U}_\nu$ и $\mathcal{U}'_\nu$ являются сингулярными эллиптическими операторами с $(\varepsilon, s)$-маломеняющимися коэффициентами и при этом выполнены соотношения*:

$$2k+1-\operatorname{Re}\nu>0,\quad s+2m-2k-1+\operatorname{Re}\nu-\max_j m_j>0.$$

*Тогда при достаточно малых $\varepsilon$ оператор $\mathcal{U}_\nu$, если* $\operatorname{Re}\nu>0$ *или* $\nu=0$, *и оператор $\mathcal{U}'_\nu$, если* $\operatorname{Re}\nu\geqslant0$, *имеют регуляризаторы, принадлежащие пространствам* $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\nu^s(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n, m), H_\nu^{s+2m}(\mathbb{R}_+^{n+1}))$.

## § 4.9. Весовая краевая задача в ограниченной области

Пусть $\Omega$ — ограниченная область с гладкой границей полупространства $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Предполагается, что выполнены все необходимые для нее условия из гл. III. Обозначим через $\mathcal{A}$ эллиптический внутри области $\Omega$ оператор четного порядка $2m$ с бесконечно дифферен-

цируемыми в $\Omega$ комплекснозначными коэффициентами. Пусть вблизи границы $\mathscr{A}$ допускает следующее представление:

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}\left(x, \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)=\sum_{|\alpha|+2\alpha_{n+1}\leq 2m} a_\alpha(x)\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}}. \quad (4.9.1)$$

Коэффициенты $a_\alpha(x)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми вплоть до гиперплоскости $y=0$ и удовлетворяют условию:

$$D_y^p a_\alpha(x)=0, \quad y=0, \quad p=1, 2, \ldots \quad (4.9.2)$$

Зададим $m$ граничных операторов $\mathscr{G}_j$, $j=0, 1, \ldots, m-1$, по формулам

$$\mathscr{G}_j\left(x', \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)=\sum_{|\alpha|+2\alpha_{n+1}\leq m_j} g_{\alpha_j}(x')\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}},$$

где $g_{\alpha_j}$ — бесконечно дифференцируемые коэффициенты переменного $x'\in\mathbb{R}^n$.

Предположим, что многочлены

$$\mathscr{A}(x, \xi', \eta^2)=\sum_{|\alpha|+2\alpha_{n+1}=2m} a_\alpha(x)(\xi')^{\alpha'}\eta^{2\alpha_{n+1}},$$

$$\mathscr{G}_{j,0}(x', \xi', \eta^2)=\sum_{|\alpha|+2\alpha_{n+1}=2m_j} g_{\alpha_j}(x')(\xi')^{\alpha'}\eta^{2\alpha_{n+1}},$$

где $\xi'\in\mathbb{R}^n$, $i=0, 1, \ldots, m-1$, образуют эллиптический набор для каждой фиксированной точки границы.

Рассмотрим краевую задачу вида

$$\mathscr{A}u=f \text{ в } \Omega,$$
$$\sigma_\nu\tilde{\mathscr{G}}_j u|_{\partial\Omega}=g_j, \quad j=0, 1, \ldots, m-1, \text{ на } \partial\Omega, \quad (4.9.3)$$

где оператор $\tilde{\mathscr{G}}_j$ в каждой л. с. к. имеет вид

$$\tilde{\mathscr{G}}_j=\mathscr{G}_j\left(x', \frac{1}{i}D_{x'}, \frac{1}{i^2}B_y\right)B_y^k.$$

В дальнейшем, как и ранее, предполагается выполнение условий

$$2k+1-\operatorname{Re}\nu>0, \; s+2m-2k-1+\operatorname{Re}\nu-\max_j m_j>0. \quad (4.9.4)$$

Основной целью настоящего параграфа является доказательство нетеровости поставленной краевой задачи. Для этого нам необходимо построить регуляризатор для оператора

$$\mathscr{U}_\nu\colon u\to\mathscr{U}_\nu u=\{\mathscr{A}u, \sigma_\nu\tilde{\mathscr{G}}_0 u|_{\partial\Omega}, \ldots, \sigma_\nu\tilde{\mathscr{G}}_{m-1}u|_{\partial\Omega}\}.$$

Из результатов гл. III следует, что оператор $\mathscr{U}_\nu$ непрерывно отображает пространство $H_\nu^{s+2m}(\Omega)$ в пространство

$$\mathscr{H}_\nu^s(\Omega, \partial\Omega, m)=H_\nu^s(\Omega)\times\prod_{j=0}^{m-1} H^{s+2m-2k-1+\operatorname{Re}\nu-m_j}(\partial\Omega),$$

наделенное топологией прямого произведения.

Построение регуляризатора будем осуществлять локально. Для этого нам потребуется некоторая операция, связанная с продолжением специального вида. Опишем ее. Пусть $x^0=(x_1^0, ..., x_n^0, 0)$ — точка из $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, лежащая на гиперплоскости $y=0$. Обозначим через $K_\delta^+(x^0)$ открытый полукуб

$$K_\delta^+(x^0)=\{x=(x', y): x\in\mathbb{R}^{n+1}_+, |x_p-x_p^0|<\delta, p=1, 2, ..., n+1\}.$$

Пусть функция $a(x)$ задана в полукубе $K_{2\delta}^+(x^0)$. Тогда определим следующие операторы продолжения $\Pi_{p,\delta}^{x^0}$, $p=1, 2, ..., n$, $\delta<1$, по формулам:

$$\Pi_{p,\delta}^{x^0} a(x)=\begin{cases} a(x_1, ..., x_n, y), \text{ если } |x_p-x_p^0|<\delta, \\ a(x_1, ..., x_{p-1}, x_p^0+\operatorname{sign}(x_p-x_p^0)\times \\ \times[|x_p-x_p^0|-(1-\delta)\exp[2-2/(|x_p-x_p^0|-\delta]], \\ x_{p+1}, ..., x_n, y), \text{ если } \delta<|x_p-x_p^0|<1. \end{cases}$$

При $p=n+1$ полагаем

$$\Pi_{n+1,\delta}^{x^0} a(x)=\begin{cases} a(x', y), \text{ если } 0<y\leqslant\delta, \\ a(x', (y^2-(1-\delta^2)\exp(2-2/(y^2-\delta^2)))^{1/2}), \text{ если } \delta<y<1. \end{cases}$$

Определим оператор $\Pi_\delta^{x^0}$ как суперпозицию операторов $\Pi_{p,\delta}^{x^0}$: $\Pi_\delta^{x^0}=\Pi_{1,\delta}^{x^0}\ldots\Pi_{n,\delta}^{x^0}\Pi_{n+1,\delta}^{x^0}$. Корректность этого определения следует из того факта, что функция $\lambda(t)=t-(1-\delta)\exp\left(2-\frac{2}{t-\delta}\right)$ — монотонная на $\delta<t<\delta+1$ с областью значения $(\delta, 2\delta)$ и обладает следующим свойством:

$$\lambda(\delta+0)=\delta, \quad \frac{\partial\lambda(\delta+0)}{\partial t}=1,$$

$$\frac{\partial^q\lambda(\delta+0)}{\partial t^q}=0, \qquad q=2, 3, ... \tag{4.9.5}$$

Кроме того, справедливы оценки

$$\sup_{\delta<t<\delta+1}\left|\frac{\partial^q\lambda(t)}{\partial t^q}\right|\leqslant c_q, \tag{4.9.6}$$

в которых постоянные $c_q>0$ не зависят от $\delta$, если $0<\delta<1$.

Отметим еще одно свойство оператора $\Pi_\delta^{x^0}$. Если функция $a\in C^\infty(\overline{K_{2\delta}^+(x^0)})$, то $\Pi_\delta^{x^0}a\in C^\infty(\overline{K_1^+(x^0)})$, причем $\Pi_\delta^{x^0}a(x)=a(x)$ при $x\in K_\delta^+(x^0)$. Для любого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ справедлива оценка

$$\sup_{x\in K_1^+(x^0)}\left|D_{x'}^{\alpha'}\left(\frac{1}{y}D_y\right)^{\alpha_{n+1}}\Pi_\delta^{x^0}a(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant c_\alpha \max_{1\leqslant p\leqslant n+1}\ \max_{0\leqslant\beta_p\leqslant\alpha_p}\ \sup_{x\in K_{2\delta}^+(x_0)}\left|D_{x'}^{\beta'}\left(\frac{1}{y}D_y\right)^{\beta_{n+1}}a(x)\right|, \tag{4.9.7}$$

постоянная $c_\alpha>0$ не зависит от $\delta\in(0, 1)$ и функции $a$, удовлетворяющей условию (4.9.2).

Обозначим через $\varphi(t)$ функцию из $\overset{0}{C}{}^{\infty}(R^1)$, причем такую, что $\varphi(t)\geqslant 0$ при $t\in R^1$, $\varphi(t)=1$ при $|t|\leqslant 1/2$, $\varphi(t)=0$ при $|t|\geqslant 1$. Введем оператор $\pi_\delta^{x^0}$ с помощью формулы

$$\pi_\delta^{x^0} a(x)=\left(\Pi_\delta^{x^0} a(x)\right)\varphi(y)\prod_{p=1}^{n}\varphi(x_p-x_p^0)-$$
$$-a(x^0)\varphi(y)\prod_{p=1}^{n}\varphi(x_p-x_p^0)+a(x^0). \quad (4.9.8)$$

Нетрудно видеть, что при $0<\delta<1/2$ имеют место соотношения:

$$\pi_\delta^{x^0} a(x)=a(x) \text{ при } x\in K_\delta^+(x^0),$$
$$\pi_\delta^{x^0} a(x)=a(x^0) \text{ при } x\in \mathbb{R}_+^{n+1}\setminus K_1^+(x^0).$$

Справедлива также оценка

$$\sup_{x\in R_+^{n+1}}\left|D_{x'}^{\alpha'}\left(\frac{1}{y}D_y\right)^{\alpha_{n+1}}\pi_\delta^{x^0} a(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant c_\alpha \max_{1\leqslant p\leqslant n+1}\ \max_{0\leqslant\beta_p\leqslant\alpha_p}\ \sup_{x\in K_{2\delta}^+(x_0)}\left|D_{x'}^{\beta'}\left(\frac{1}{y}D_y\right)^{\beta_{n+1}} a(x)\right|, \quad (4.9.9)$$

где постоянная $c_\alpha$ не зависит от $\delta\in(0, 1)$ и от функции $a(x)$, удовлетворяющей условию (4.9.2).

Эта оценка есть следствие (4.9.2). В частном случае $\alpha'=0$ получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+^{n+1}}\left|\left(\frac{1}{y}D_y\right)^{\alpha_{n+1}}\pi_\delta^{x^0} a(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant c_{\alpha_{n+1}}\max_{0\leqslant\beta_{n+1}\leqslant\alpha_{n+1}}\ \sup_{x\in K_{2\delta}^+(x^0)}\left|\left(\frac{1}{y}D_y\right)^{\beta_{n+1}} a(x)\right|. \quad (4.9.10)$$

Далее в тексте предполагается, что коэффициенты удовлетворяют условию (4.9.2).

Приступим теперь к построению регуляризатора для оператора $\mathcal{U}_\nu$. Возьмем произвольную точку $\tilde{x}^0$ границы $\partial\Omega$. Она принадлежит хотя бы одной из областей $\Omega_{l_0}$, образующих покрытие области $\bar{\Omega}$. Тогда точка $\varkappa_{l_0}\tilde{x}^0=x^0$ принадлежит гиперплоскости $y=0$. Пусть $\delta$ таково, что полукуб $K_{2\delta}^+(x^0)$ целиком лежит в $\varkappa_{l_0}\Omega_{l_0}=\omega_{l_0}$.

Рассмотрим операторы

$$\mathcal{A}_\delta^{x^0}=\sum_{|\alpha|+2\alpha_{n+1}\leqslant 2m}\left[\pi_\delta^{x^0} a_\alpha(x)\right]\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}},$$
$$\mathcal{G}_{j,\delta}^{x^0}=\sum_{|\alpha|+2\alpha_{n+1}\leqslant m_j}\left[\pi_\delta^{x^0} g_{\alpha_j}(x)\right]\left(\frac{1}{i}D_{x'}\right)^{\alpha'}\left(\frac{1}{i^2}B_y\right)^{\alpha_{n+1}}.$$

Для пограничных операторов оператор продолжения $\pi_\delta^{x_0}$ применяется по первым $n$ переменным. Пусть

$$\mathcal{U}_{\nu,\delta}^{x^0}\colon\ u\mapsto\mathcal{U}_{\nu,\delta}^{x^0}u=\left\{\mathcal{A}_\delta^{x^0}u,\ \sigma_\nu\tilde{\mathcal{G}}_{0,\delta}^{x^0}u|_{\partial\Omega},\ \dots,\ \sigma_\nu\tilde{\mathcal{G}}_{m-1,\delta}^{x^0}u|_{\partial\Omega}\right\}.$$

За счет выбора $\delta$ можно сделать оператор $\mathscr{U}^{x^0}_{\nu,\delta}$ сингулярным эллиптическим оператором с маломеняющимися коэффициентами. Нетрудно показать, что условия 1)—7) п. 4.8 с заменой в них точки $O$ на $x^0$ будут ввиду гладкости коэффициентов и условия (4.9.2) выполнены. Далее, ввиду наличия оценки (4.9.10), постоянная в которой не зависит от $\delta$, при уменьшении числа $\delta$, во-первых, число $\varepsilon$ в условиях 2)—5) будет стремиться к нулю, а, во-вторых, оценки норм производных вида $D^{\beta'}_{x'}\left(\frac{1}{y}D_y\right)^{\beta_{n+1}}$ коэффициентов операторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{G}_j$ при ограниченных $|\beta|$ не будут возрастать. Следовательно, мы находимся в условиях теоремы 4.8.1.

По этой теореме для оператора $\mathscr{U}^{x^0}_{\delta}$ при достаточно малом $\delta=\delta(x^0)$ существует регуляризатор

$$\mathscr{R}^{x^0}_{\delta}\in\mathscr{L}\left(\mathscr{H}^{s}_{\nu},\ \mathscr{H}^{s+2m}_{\nu}\right).$$

Такие рассуждения можно привести для любой граничной точки, и, таким образом, построить покрытие границы прообразами полукубов $K^{+}_{\delta}(x)$, $x\in\{y=0\}$, $\delta=\delta(x)>0$. Из указанного покрытия выделим конечное покрытие границы, а вместе с ней и некоторой ее окрестности. Обозначим прообразы центров полукубов, образующих это конечное покрытие, через $\tilde{x}^q$, $q=1, \ldots, \bar{q}$, а их образы — через $x^q=\varkappa_{l_q}\tilde{x}^q$. Ребро $q$ куба обозначим $\delta_q$. Рассмотрим область $\mathscr{G}=\Omega\setminus\bigcup\limits_{q=1}^{\bar{q}}\varkappa^{-1}_{l_q}K^{+}_{\delta_q}(x^q)$, которая лежит внутри $\Omega$. Для области $\mathscr{G}$ нужно проделать те же построения, что и выше. Нам нет нужды этим заниматься, поскольку внутри $\Omega$ оператор $\mathscr{A}$ эллиптичен, причем имеет гладкие коэффициенты. Поэтому мы можем сослаться, например, на книгу Л. Хёрмандера [171], в которой показано существование конечного покрытия области $\mathscr{G}$, например, кубами $K_{\delta_q}(x^q)$, $q=\bar{q}+1, \ldots, \bar{\bar{q}}$, расположенными вместе с замыканиями в $\Omega$.

Причем это покрытие обладает следующим свойством: для каждого куба $K_{\delta_q}(x^q)$, $q>\bar{q}$, существует сохраняющий гладкость оператор продолжения $\pi^{x^q}_{\delta_q}$ (его можно построить по указанной выше схеме) такой, что для оператора

$$\mathscr{A}^{x^q}_{\delta_q}=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}\left[\pi^{x^q}_{\delta_q}b_\alpha(x)\right]\left(\frac{1}{i}D_x\right)^{\alpha},$$

где $b_\alpha$ — коэффициенты оператора $\mathscr{A}$, определенные в $\Omega$, существует регуляризатор

$$\mathscr{R}^{x^q}_{\delta_q}\in\mathscr{L}\left(H^s(\mathbb{R}^{n+1}),\ H^{s+2m}(\mathbb{R}^{n+1})\right).$$

Последнее означает, что

$$\mathscr{A}^{x^q}_{\delta_q}\mathscr{R}^{x^q}_{\delta_q}=I+T^{x^q}_{\text{п},\delta_q},$$

$$\mathscr{R}^{x^q}_{\delta_q}\mathscr{A}^{x^q}_{\delta_q}=I+T^{x^q}_{\text{л},\delta_q},$$

где сглаживающие операторы (правый — п, левый — л) $T^{x^q}_{\text{п},\delta_q}$, $T^{x^q}_{\text{л},\delta_q}$ принадлежат $\mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^{n+1}),\ H^{s+1}(\mathbb{R}^{n+1}))$. Весьма важно, что коэффициенты оператора $\mathscr{A}^{x^q}_{\delta_q}$ совпадают с коэффициентами оператора

$\mathscr{A}$ в кубе $K_{\delta_{q/2}}(x^q)$, $q>\bar{q}$. Итак, мы имеем покрытие $\Omega$ конечным множеством областей $\varkappa_{l_q}^{-1} K_{\delta_q}(x^q)$, при этом диффеоморфизмы $\varkappa_{l_q}$ при $q>\bar{q}$ считаются тождественными отображениями. Не ограничивая общности предположим, что области $\varkappa_{l_q}^{-1} K_{\delta_q/4}(x^q)$ также образуют покрытие $\bar{\Omega}$.

Обозначим через $\{h_q\}_{q=1}^{\bar{\bar{q}}}$ разбиение единицы, подчиненное этому последнему покрытию. Введем множество финитных бесконечно дифференцируемых функций $\psi_q$, $q=1, 2, \ldots, q$, таких, что

$$\operatorname{supp}\psi_q \subset \varkappa_{l_q}^{-1} K_{\delta_q/2}(x^q), \tag{4.9.11}$$

$$\psi_q(x) h_q(x) \equiv h_q(x), \tag{4.9.12}$$

где $q=1, \ldots, \bar{\bar{q}}$. Пусть также в каждой л. с. к.

$$D_y \psi_q \equiv 0 \tag{4.9.13}$$

в некоторой окрестности гиперплоскости $y=0$. Существование такого набора функций, по существу, доказано при выводе леммы 3.5.1.

Пусть $\Phi=\{f, g_0, \ldots, g_{m-1}\} \in \mathscr{H}_\nu^s(\Omega, \partial\Omega, m)$. Тогда искомый регуляризатор $\mathscr{R}_\nu$ оператора $\mathscr{U}_\nu$ определим по формуле

$$\mathscr{R}_\nu \Phi = \sum_{q=1}^{\bar{q}} h_q \varkappa_{l_q}^{-1} \mathscr{R}^{x^q} \varkappa_{l_q}(\psi_q \Phi) + \sum_{q=\bar{q}+1}^{\bar{\bar{q}}} h_q \mathscr{R}_{\delta_q}^{x^q}(\psi_q f).$$

Здесь $\psi_q \Phi = \{\psi_q f, \psi_q|_{\partial\Omega} g_0, \ldots, \psi_q|_{\partial\Omega} g_{m-1}\}$. Используя теорему 3.3.1 и утверждение об эквивалентности норм из гл III, нетрудно увидеть, что $\mathscr{R}_\nu \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_\nu^s(\Omega, \partial\Omega, m), \mathscr{H}_\nu^{s+2m}(\Omega))$. С помощью формулы Лейбница для операторов Бесселя, учитывая свойства $\psi$ (см. (4.9.11)—(4.9.13)) и следствия 3.3.1 и 3.3.2, показывается, что $\mathscr{R}_\nu$ действительно является регуляризатором.

Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 4.9.1. *Пусть* $\operatorname{Re}\nu>0$ *или* $\nu=0$. *Пусть выполнено соотношение* (4.9.4). *Тогда краевая задача* (4.9.3) *нетерова. Если* $u \in H_\nu^{s+2m}(\Omega)$, $\mathscr{R}_\nu u \in \mathscr{H}_\nu^{s+\varepsilon}(\Omega, \partial\Omega, m)$ *при некотором* $\varepsilon>0$, то $u \in H_\nu^{s+2m+\varepsilon}$ *и имеет место оценка*

$$c\|u\|_{H_\nu^{s+2m+\varepsilon}(\Omega)} \leqslant \|\mathscr{A}u\|_{H_\nu^{s+\varepsilon}(\Omega)} + \sum_{j=0}^{m-1} \|\sigma_\nu \tilde{\mathscr{G}}_j|_{\partial\Omega}\|_{H^{s+\varepsilon+2m-m_j-2k-1+\operatorname{Re}\nu}(\partial\Omega)} + \|u\|_{H_\nu^{s+2m}(\Omega)}, \tag{4.9.14}$$

*где* $c$ *не зависит от* $u$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду компактности $\Omega$ нетеровость краевой задачи эквивалентна существованию регуляризатора (см. по этому поводу абстрактные результаты З. Прёсдорфа [155]). Априорная оценка (4.9.14) следует из того, что для оператора $\mathscr{R}_\nu$ справедлива формула

$$\mathscr{R}_\nu \mathscr{U}_\nu u = \sum_{q=1}^{\bar{\bar{q}}} h_q \psi_q u + T_{\text{л},\nu} u = u + T_{\text{л},\nu} u.$$

Аналогичная формула верна и для правого регуляризатора, т. е. $\mathscr{R}_\nu$ является и правым регуляризатором. Здесь $T_{\text{л},\nu}$—сглаживающий оператор. Утверждение о повышении гладкости также есть следствие

этой формулы. В самом деле, если $u \in H_\nu^{s+2m}(\Omega)$, то $T_{л,\nu} u \in H_\nu^{s+2m+1}(\Omega)$. Так как $\mathcal{U}_\nu u \in \mathcal{H}_\nu^{s+\varepsilon}$, то $\mathcal{R}_\nu \mathcal{U}_\nu u \in H_\nu^{s+2m+\varepsilon}$. По соответствующей формуле Лейбница имеем

$$\psi_q \mathcal{A}_{\delta_q}^{x^q} u = \mathcal{A}_{\delta_q}^{x^q}(\psi_q u) + \hat{\mathcal{A}}_{\delta_q}^{x^q} u, \qquad q = \bar{q}+1, \ldots, \bar{\bar{q}},$$

где оператор $\hat{\mathcal{A}}$ имеет порядок на единицу меньше, чем оператор $\mathcal{A}$. Тогда из этой формулы будет следовать, что

$$u \in H_\nu^{s+2m+\min(\varepsilon,\, 1)}(\Omega).$$

Повторяя те же рассуждения, мы в конце концов покажем, что $u \in H_\nu^{s+2m+\varepsilon}(\Omega)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь сингулярное уравнение (4.9.1) с весовыми краевыми условиями вида

$$\sigma_{\nu+1/2} \tilde{\mathcal{G}}'_j u|_{\partial\Omega} = g_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4.9.15}$$

где $\mathrm{Re}\,\nu \geqslant 0$ и операторы $\tilde{\mathcal{G}}'_j$ в каждой л. с. к. имеют вид

$$\tilde{\mathcal{G}}'_j = D_y \mathcal{G}_j\left(x', \frac{1}{i} D_x, \frac{1}{i^2} B_y\right) B_y^k.$$

При выполнении всех предыдущих условий справедлива

Теорема 4.9.2. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\nu \geqslant 0$ *и выполнены соотношения* (4.9.4). *Тогда краевая задача* (4.9.1), (4.9.15) *нетерова. Если* $u \in H_\nu^{s+2m}(\Omega)$, *а* $\mathcal{U}'_\nu u \in \mathcal{H}_\nu^{s+\varepsilon}(\Omega, \partial\Omega, m)$, *то* $u \in H_\nu^{s+2m+\varepsilon}$ *и имеет место оценка*

$$c\,\|u\|_{H_\nu^{s+2m+\varepsilon}(\Omega)} \leqslant \|\mathcal{A} u\|_{H_\nu^{s+\varepsilon}(\Omega)} + \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \|\sigma_{\nu+1/2} \tilde{\mathcal{G}}'_j u|_{\partial\Omega}\|_{H^{s+\varepsilon+2m\ \ m_j\ \ 2k\ \ 1+\mathrm{Re}\,\nu}(\partial\Omega)} + \|u\|_{H_\nu^{s+2m}(\Omega)},$$

*где постоянная* $c > 0$ *не зависит от* $u$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.9.1.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Уравнение $\Delta_B u = 0$ было предметом многочисленных исследований (см., например, обзор А. Вайнштейна [17]). Впервые фундаментальное решение простейшего уравнения $\Delta_B u = f$ в двумерном случае было построено А. Вайнштейном [15]. В этой работе он дает несколько различных выражений для фундаментального решения, которые затем используются при изучении разрывных интегралов, содержащих функцию Бесселя. М. Н. Олевский [152] дает выражение фундаментального решения уравнения $\Delta_B u = f$ в многомерном случае в терминах гипергеометрических функций при условии, что параметр $k$ в операторе Бесселя отличен от 2, 3, ... Построенное решение он применяет для исследования задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta_B u = 0$ в полусферической области. В работе Д. Диаза и А. Вайнштейна [33] (см. также А. Вайнштейн [16]) фундаментальное решение в целом уравнения $\Delta_B u = f$ ищется в виде потенциала некоторого цилиндрического заряда, который фактически представляет собой результат применения оператора обобщенного сдвига по переменной, по которой действует оператор Бесселя, к соответствующему фундаментальному решению с особенностью на сингулярной гиперплоскости. Результаты этой работы обобщены Р. Вайнахтом [18], где построено фундаментальное решение уравнения $\Delta_B^m u = 0$.

Принцип Дирихле для уравнения $\Delta_B u=0$ в полупространстве изучался П. И. Лизоркиным [134]. В другой работе [135] он построил функцию Грина для краевой задачи с оператором $\Delta_B$, используя фундаментальное решение, построенное А. Вайнштейном [16], и рассмотрел некоторые вариационные задачи.

В работе Я. И. Житомирского [36] была изучена задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных, содержащих оператор Бесселя. Найдены классы корректности и классы единственности задачи Коши. Для решения этих вопросов он использовал метод теории разложений, включая преобразование Бесселя по пространственной переменной.

Изучение уравнений в частных производных, содержащих дифференциальный оператор Бесселя и некоторые другие классы сингулярных уравнений, с использованием многомерного преобразования Фурье — Бесселя было начато в работах И. А. Киприянова [59], [61], [63]. Им были введены соответствующие весовые функциональные пространства [59], [63] и доказаны для них теоремы вложения, включая прямые и обратные теоремы о следах. Это позволило ему получить априорные оценки решений в терминах названных весовых классов и рассмотреть некоторые вариационные задачи [60], [66]. В этих работах было введено понятие $B$-эллиптического оператора.

Конструкция фундаментальных решений $B$-эллиптических уравнений была дана в работах И. А. Киприянова, В. И. Кононенко [64], [69]. При этом использовалось два подхода построения фундаментальных решений: первый основан на соответствующем аппарате теории распределений, во втором использовался аналог классического преобразования Радона. В случае переменных коэффициентов [69] применялась процедура Леви.

В одномерном случае проблема деления, возникающая при рассмотрении неоднородных уравнений, содержащих оператор Бесселя (или сводящихся к таким уравнениям), изучалась другими методами в работах А. Г. Земаняна [41], [42]. Конструкция фундаментальных решений однородных $B$-гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами, когда оператор Бесселя действует по временной переменной, содержится в статье И. А. Киприянова, Л. А. Иванова [95]. Фундаментальные матрицы решений параболических систем, содержащих оператор Бесселя, использовались в работах В. В. Крехивского, М. И. Матийчука [119], [120] и М. И. Матийчука [146].

Существование фундаментального решения любого сингулярного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами (общий случай) доказано А. А. Куликовым в [121]. Фундаментальное решение получено в явном виде с помощью специальным образом построенных так называемых «лестниц Хёрмандера», при этом выход в комплексную область в общем случае необходимо осуществлять как минимум по двум направлениям. Существенно также используются некоторые свойства четной рациональной функции. Там же [121] А. А. Куликовым введено понятие $B$-гипоэллиптического оператора и доказано существование для любого $B$-гипоэллиптического оператора фундаментального решения, бесконечно дифференцируемого вне начала координат, четного по соответствующей переменной. Приведены оценки, характеризующие особенность фундаментального решения в начале координат.

И. А. Киприяновым, Л. А. Ивановым [96] с помощью разложения функций на плоские весовые волны получены представления для фундаментальных решений $B$-эллиптических и $B$-гиперболических уравнений, в которых оператор Бесселя действует по нескольким переменным. В гиперболическом случае доказаны формулы типа известных формул Герглотца — Петровского.

Структура фундаментального решения дала возможность в работе [67] при доказательстве теорем существования в граничной области для $B$-эллиптических уравнений применить метод самосопряженных расширений.

Неравенство Гординга и его приложения содержатся в работах И. А. Киприянова [68], [72]. Другие сингулярные формы Дирихле изучались в [51] в связи с выяснением достаточных условий для полуограниченности $B$-эллиптических операторов, необходимых при исследовании спектральных характеристик.

Построение так называемых «ядер Пуассона», а, точнее говоря, функции Грина в четверти пространства $y>0$, $t>0$ для задач с однородными

операторами $\mathscr{L}(D_x, B_y, D_t)$ с постоянными коэффициентами, где $B_y$ — оператор Бесселя по переменной $y$, $\mathscr{L}$ является $B$-эллиптическим оператором, а граничные условия ставятся на гиперплоскости $t=0$, было осуществлено И. А. Киприяновым, М. И. Ключанцевым [76], [89], [90]. Применяя преобразование Фурье — Бесселя, оператор обобщенного сдвига и разложение на плоские весовые волны [76], [90], они выяснили структуру ядер Пуассона. С помощью классического оператора преобразования получены оценки не только для самих ядер, но и для соответствующих производных от этих ядер. Случай неоднородного уравнения, рассмотрен в [111]. Задача получения априорных оценок в соответствующих классах Гёльдера и весовых классах теперь, по существу, может быть сведена к оценкам возникающих при этом интегральных операторов типа цилиндрических потенциалов и их соответствующих производных. Так возникают сингулярные интегралы нового типа. Ядра этих операторов имеют особенность на гиперплоскости, а сами они порождены оператором обобщенного сдвига. Результаты исследований по названным оценкам содержатся в работах И. А. Киприянова, М. И. Ключанцева [71], [77], [78]. Оценки типа оценок Кальдерона и Зигмунда даются в [77], а оценки типа Гёльдера, Корна приведены в [112].

Используя сферические средние или, как их иногда именуют, сферические $B$-гармоники, Л. Н. Ляхов [142], [143], [144] нашел формулу для сингулярного интегрального оператора, порожденного обобщенным сдвигом, о котором только что шла речь, в образах Фурье — Бесселя (см. теорему 3.1, формулу (3.2) из [144]). Там же он указал представление сингулярного п.д.о., введенного в [86] с помощью преобразования Фурье — Бесселя в терминах найденной формулы для сингулярного интегрального оператора.

Оценки решений краевых задач с оператором Бесселя в классах Гёльдера и в классах $\mathscr{L}_{p,\nu}$ даны в [110]. Сингулярная задача с граничными условиями на поверхности особенностей исследовалась в [82].

Разрешимость краевых задач для линейных и квазилинейных уравнений $B$-эллиптического типа изучалась А. Н. Байдаковым [4], [5].

Заметим, что весовые функциональные пространства [63], [73] введены путем замыкания гладких четных по нормальному к границе направлению функций. Поскольку в процессе замыкания сохраняются не все следы (это характерный момент теории некоторых весовых пространств), то рассматриваемая в этих пространствах краевая задача [61], [72], [74], [79], а также приведенные выше, аналогичны задаче типа $E$ (по терминологии М. В. Келдыша [58]) с однородными краевыми условиями четности. Применение в качестве основного метода преобразования Фурье обусловило вещественность параметра в операторе Бесселя.

Остановимся теперь на методе операторов преобразования. Классические операторы преобразования Сонина и Пуассона применялись в теории сингулярных гиперболических уравнений типа Эйлера — Пуассона — Дарбу [126], [139]. Соответствующие операторы преобразования применялись Г. Н. Положим [153] в теории обобщенных аналитических функций. В эллиптическом случае М. И. Ключанцев [114], [115] применял построенные им операторы преобразования типа интегралов дробного порядка к изучению некоторых сингулярных краевых задач. Операторы преобразования, соответствующие дифференциальному оператору Лежандра, и их применение даны в [178], [179]. Систематическое применение операторов преобразования (гл. II) в эллиптическом случае было осуществлено В. В. Катраховым [55], [56], [57] (см. § 4.7—4.9).

Для сингулярных уравнений высших порядков поставлены весовые краевые условия, число которых равно половине порядка уравнения. Это позволило ему, в отличие от авторов, рассматривавших задачу $E$ и ее аналоги, рассмотреть наряду с регулярными решениями и сингулярные решения в новых более широких функциональных пространствах (см. гл. III), а также рассматривать случай комплексного параметра в операторе Бесселя. В работе [74] рассматриваются общие невесовые краевые условия, однако они ставятся на нехарактеристической части границы и параметр в операторе Бесселя вещественный.

Вместо однопараметрического оператора Бесселя, участвующего в определении дифференциального оператора, для которого изучается краевая задача в [55], [57] (см. § 4.8—4.9), можно поставить трехпараметрический оператор

$$\mathcal{L}=y^p\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu y^{p-1}\frac{\partial}{\partial y}+\mu y^{p-2},$$

где $p<2$ и $\mu$, $\nu$ — комплексные. Соответствующая краевая задача сводится к изученной путем замены переменных и неизвестной функции.

Изучению конкретных уравнений высших порядков посвящено значительно меньшее число работ, хотя такие уравнения сравнительно недавно стали появляться в различных прикладных задачах механики и физики. Вязкое трансзвуковое уравнение (или $BT$-уравнение)

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

изучалось в работе [157], где показано, что решения этого уравнения дают более точные асимптотики обтекания тел конечных размеров звуковым на бесконечности потоком реального газа, чем классическое решение И. Ф. Франкля для идеального газа. В работе [34] рассмотрены некоторые краевые задачи для линеаризованного уравнения. Для предельных случаев $\nu=0$ и $\nu=1$ построены в явном виде фундаментальные решения и функция Грина соответствующих краевых задач.

Ю. В. Засорин [37], [40] построил в явном виде фундаментальные решения одного класса гипоэллиптических операторов, содержащих по одной переменной производную нечетного порядка, а по группе переменных — оператор Бесселя с различными параметрами $\nu_k$, частным случаем которого является оператор левой части приведенного выше $BT$-уравнения. Им получены асимптотические разложения этих решений, точные формулы функции Грина некоторых краевых задач и исследованы на скорость убывания на бесконечности решения однородного уравнения в соответствующем классе распределений умеренного роста. В основе этих исследований лежит многомерное преобразование Фурье — Бесселя, в котором по одной переменной применяется преобразование Фурье, а по группе переменных — преобразование Бесселя (одномерное преобразование Ганкеля). В одномерном случае построение фундаментального решения, приводящее к вычислению интегралов Фурье — Бесселя от специальных функций, основано на использовании теоремы Слейтера и основных свойствах преобразования Меллина. Само фундаментальное решение выражается через специальную функцию — функцию Майера. Переход к многомерному случаю совершается на основании свойств симметрии названного многомерного преобразования Фурье — Бесселя [38] и построенного Ю. В. Засориным [38] гармонического анализа.

Разрешимость краевых задач доказывается непосредственно построением соответствующих функций Грина [40]. Нормальная разрешимость некоторых сингулярных $B$-эллиптических уравнений в ограниченной области $\Omega^+$ доказана в [93], [99]. Некоторые результаты о локальной разрешимости сингулярных $B$-эллиптических уравнений получены в [84], [88]. Краевые задачи для сингулярных псевдодифференциальных уравнений изучались Л. Н. Ляховым [141].

Первую краевую задачу для $B$-эллиптических систем дифференциальных уравнений изучал Ф. Г. Мухлисов [149].

# ГЛАВА V

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В начале главы мы исследуем комплексные степени сингулярных эллиптических операторов, в которых по одной из переменных действует оператор Бесселя ($B$-эллиптические операторы). В § 5.1 строится параметрикс произвольного порядка. На этой основе в § 5.2 исследуется аналитическая группа степеней. Наиболее интересные результаты, на наш взгляд, связаны с ядрами в смысле теории распределений степеней исходного оператора. Оказывается, что основные их свойства существенно зависят от наличия (или отсутствия) в изучаемой области особенностей по пространственным переменным. В первом случае свойства зависят от вида особенностей, во втором наши результаты совпадают с классическими результатами для эллиптических операторов с гладкими коэффициентами.

В начале § 5.3 конструируется формула среднего значения для дифференциального оператора второго порядка $\Delta_B$, содержащего по одной из переменных сингулярный дифференциальный оператор Бесселя. Затем найденная соответствующая формула среднего значения применяется к разложению некоторых функций, обладающих особенностью определенного вида, в ряд Фурье по собственным функциям указанного многомерного сингулярного дифференциального оператора. Улавливается специфика в образовании коэффициентов Фурье для указанных функций. С учетом этой специфики доказывается существование и выясняется поведение так называемых ядер дробного порядка.

В § 5.4 указываются асимптотические свойства спектральной функции $B$-эллиптического оператора $\mathscr{L}$ с постоянными коэффициентами. Здесь фактически получены внутренние оценки остатка в асимптотических формулах для $e(x, x, \lambda)$. Доказательство основной теоремы приведено в конце параграфа. Сначала рассматривается фундаментальное решение некоторого параболического оператора, соответствующего оператору $\mathscr{L}$, затем изучается асимптотика ядер билинейных форм соответствующих операторов. Асимптотика спектральной функции внутри области, где нет особенностей у коэффициентов оператора, совпадает с соответствующей асимптотикой для эллиптических операторов с гладкими коэффициентами, асимптотика же на границе зависит от вида особенностей. Рассмотрен

также случай, когда одна из точек лежит на границе, а другая — внутри области.

В § 5.5 выясняется асимптотика спектральной функции $B$-эллиптического оператора $\mathscr{L}$ с переменными коэффициентами при соответствующем ограничении на поведение коэффициентов. Доказывается, что закономерности асимптотики из предыдущего параграфа (§ 5.4) переносятся на случай оператора $\mathscr{L}$ с переменными коэффициентами.

## § 5.1. Параметрикс произвольного порядка

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}=\{x=(x', y)\colon x'\in\mathbb{R}^n, \quad y\in\mathbb{R}^1\}$. Обозначим через $S_+=S_+(\mathbb{R}^{n+1})$ подмножество четных по последней переменной функций из пространства гладких быстро убывающих функций $S(\mathbb{R}^{n+1})$ (см. § 1.1 и 1.5). На множестве $S_+$ определено преобразование Фурье—Бесселя

$$\hat{u}(\xi)=F_\nu[u]=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-i(x',\xi')}j_\nu(y\eta)u(x)(y^2)^{\nu+1/2}dx'dy, \tag{5.1.1}$$

где $\xi=(\xi', \eta)\in\mathbb{R}^{n+1}$, фиксированный параметр $\nu\geqslant-1/2$, $j_\nu$ — нормированная функция Бесселя первого рода, определяемая формулой $j_\nu(y)=2^\nu\Gamma(\nu+1)y^{-\nu}J_\nu(y)$.

Обратный оператор $F_\nu^{-1}$ отличается от прямого знаком в экспоненте и соответствующим множителем $c_{\nu,n}$. Норму в пространстве $H^s_{\nu,+}(\mathbb{R}^{n+1})$ (см. [63]) определяем по формуле

$$\|u\|^2_{s,\nu}=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}(\xi)|^2(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi. \tag{5.1.2}$$

В дальнейшем через $a_m(x, \xi)$ будем обозначать функцию класса $C^\infty(R^{n+1}\times R^{n+1})$, принадлежащую $S(\mathbb{R}^{n+1})$ по переменной $x$ равномерно по $\xi$ и удовлетворяющую условию однородности вещественной степени $m$ вида

$$a_m(x, t\xi)\subset t^m a_m(x, \xi), \qquad t\geqslant1, \quad |\xi|\geqslant1. \tag{5.1.3}$$

На поведение $a_m$ накладываем следующие ограничения:

либо (i) $a_m(x, \xi)$ — четная по $y$ и $\eta$ и

$$D^k_y a_m(x, \xi)=0 \text{ при } y=0, \quad k\geqslant1,$$

либо (ii) $a_m(x, \xi)$ — четная по $y$, нечетная по $\eta$

$$\text{и } D^k_y a_m(x, \xi)=0 \text{ при } y=0, \quad k\geqslant0. \tag{5.1.4}$$

Функцию $a_m$, удовлетворяющую условиям (5.1.3) и (5.1.4), будем называть *символом*.

По символу $a_m$ можно построить сингулярный псевдодифференциальный оператор (сокращенно с.п.д.о.) $\mathrm{Op}(a_m)$ по формуле (см. [54], [92])

$$\mathrm{Op}(a_m)u(x)=c_{\nu,n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}[j_\nu(y\eta)+$$
$$+i\eta j_{\nu+1}(y\eta)]e^{i(x',\xi')}a_m(x, \xi)\hat{u}(\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi. \tag{5.1.5}$$

Замечание. Второе слагаемое в квадратных скобках появилось в связи с необходимостью включить младшие члены нечетного порядка вида

$$a(x)D_y u, \quad a(x)D_y B_y^m u,$$

поскольку такие члены необходимо возникают в формулах типа Лейбница:

$$B(au) = (Ba)u + a(Bu) + 2(D_y a)(D_y u)$$

и как следствие — в формально самосопряженных выражениях:

$$y^{-k}D(ay^k Du) = aBu + (Da)Du,$$

$$B(aBu) = aB^2u + (Ba)Bu + 2(Da)DBu.$$

Условия (i) или (ii) обеспечивают (в силу четности или нечетности подынтегральной функции) на самом деле сохранение справа в (5.1.5) либо первого, либо второго слагаемого. Для этого интеграл в (5.1.5) берется по всему пространству $\mathbb{R}^{n+1}$, в отличие от обычного интегрирования по полупространству $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$. Без второго слагаемого с.п.д.о. в случае переменных коэффициентов не образуют, например, алгебры и не включают самосопряженные операторы. Этот момент принципиален для дальнейшего. В дальнейшем второе слагаемое всегда отвечает младшим членам.

Название «псевдодифференциальный оператор» оправдано тем, что операторы вида

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha'} B_{y^{n+1}}^{\alpha_{n+1}}, \qquad (5.1.6)$$

имеющие при $y=0$ сингулярные коэффициенты, являются, как легко заметить, с.п.д.о. (см. § 5.7).

Пусть функции $a_{m-j}$ являются символами и имеют степень однородности $m-j$, $j=0, 1, \ldots$ Пусть с.п.д.о. $A$ является асимптотической суммой

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{Op}(a_{m-j}). \qquad (5.1.7)$$

Обозначим через $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ограниченную область, симметричную относительно гиперплоскости $y=0$. Условие равномерной $B$-эллиптичности, введенное автором ранее, для оператора $A$ сводится к выполнению соотношения

$$|a_m(x, \xi)| > \varepsilon, \qquad x \in U, \quad |\xi| = 1, \qquad (5.1.8)$$

где $\varepsilon$ — некоторое положительное число.

Изменяя оператор $A$ на некоторый оператор из $\mathscr{L}_{\nu}^{-\infty}$ (это множество состоит из операторов, имеющих порядок (ord) $= -\infty$ в шкале $H^s_{\nu,+}$), что не повлияет на окончательные результаты, можно добиться того, чтобы соотношение (5.1.8) выполнялось при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$. Кроме того, оператор $A$ предполагается полуограниченным, что приводит к условию вида

$$|\arg a_m(x, \xi) - \pi| > \delta, \qquad x \in U.$$

В дальнейшем будем строить параметрикс для $A-\lambda$, где

$$A-\lambda=\operatorname{Op}(a_m-\lambda)+\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{Op}(a_{m-j}). \qquad (5.1.9)$$

Заметим, что функция $a_m-\lambda$ не является однородной по $\xi$. Однако она однородна степени $m$ по $(\xi, \lambda^{1/m})$. Через $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(U)$ обозначаем подмножество $\overset{0}{C}{}^{\infty}_{+}(U)$, состоящее из четных по последней переменной функций. Пусть $\varphi, \psi\in \overset{0}{C}_{+}(U)$ и удовлетворяют условиям

$$D_y^k\varphi=D_y^k\psi=0 \text{ при } y=0, \quad k=1,\ 2,\ \ldots, \quad \varphi\psi\equiv\varphi. \qquad (5.1.10)$$

Введем подлежащие определению функции $g_j(x, \xi, \lambda)$, $j=-m$, $-m-1, \ldots$ Рассмотрим операторы $\operatorname{Op}(\varphi g_j)$, определяемые по формуле (5.1.5), а также оператор $\mathscr{G}$, являющийся асимптотической суммой

$$\mathscr{G}=\sum_{j\leqslant m}\operatorname{Op}(\varphi g_j). \qquad (5.1.11)$$

Пусть $N$ — достаточно большое натуральное число. Положим

$$A_N=\sum_{-N+m\leqslant k\leqslant m}\operatorname{Op}(a_k),$$

$$\mathscr{G}_N=\sum_{-N\leqslant j\leqslant -m}\operatorname{Op}(\varphi g_j). \qquad (5.1.12)$$

Мы хотим построить параметрикс для оператора $A-\lambda$ в виде оператора $\mathscr{G}$. Для этих целей рассмотрим формулу

$$\sum_{-N\leqslant j\leqslant -m}\operatorname{Op}(\varphi g_j)\,\psi(A-\lambda)u-\varphi u=R_N u, \qquad (5.1.13)$$

где $\operatorname{ord} R_N$ должен стремиться к $-\infty$ при $N\to\infty$. Из формулы (5.1.13) при различных $N$ мы сможем последовательно определить неизвестные пока функции $g_j$. В самом деле, используя результаты об алгебре с.п.д.о. (5.1.13), можно разложить по формуле произведения с.п.д.о.

Имеем

$$\sum_{-N\leqslant j\leqslant -m}\ \sum_{-N+2m\leqslant k\leqslant m}\ \sum_{|\alpha|<j+k+N-m}\frac{1}{\alpha!}\varphi(x)\times$$
$$\times g_{j,\alpha',\alpha_{n+1}}(x, \xi, \lambda)\,b_{k,\alpha',\alpha_{n+1}}(x, \xi, \lambda)=\varphi(x), \qquad (5.1.14)$$

где $b_m=\psi(a_m-\lambda)$, $b_k=\psi a_k$, $k<m$, $g_{j,\alpha',\alpha_{n+1}}=\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi'}\right)^{\alpha'}g_{j,\alpha_{n+1}}$, а функции $g_{j,\alpha_{n+1}}$ являются линейными комбинациями выражений вида

$$\eta^s\left(\frac{\partial}{\eta\partial\eta}\right)^s g_j(x, \xi, \lambda)$$

при $s+2r=\alpha_{n+1}$, причем $s\geqslant 0$. Далее, $b_{k,\alpha',\alpha_{n+1}}=\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\alpha'} b_{k,\alpha_{n+1}}$, а через $b_{k,\alpha_{n+1}}$ обозначена комбинация производных по $y$ порядка не выше $\alpha_{n+1}$ (и не равного нулю, если $\alpha_{n+1}>0$) с множителем $y^s$, при этом $b_{k,0,0,\ldots,0}=b_k$. Замечая, что $\varphi\psi=\varphi$ и выделяя в левой части (5.1.14) старший член с максимальной степенью однородности по $(\xi, \lambda^{1/m})$, получаем

$$g_{-m}(a_m-\lambda)=1.$$

Стало быть,

$$g_{-m}(x, \xi, \lambda)=\frac{1}{a_m(x, \xi)-\lambda}. \qquad (5.1.15)$$

Последовательно определяем и остальные функции $g_j$, которые будут иметь вид

$$g_{-m-j}(x, \xi, \lambda)=\sum_{k=1}^{2j} \chi_{k_j}(x, \xi)\left[a_m(x, \xi)-\lambda\right]^{-k-1}, \qquad (5.1.16)$$

где $\chi_{k_j}$ являются многочленами от функций $a_{m-l}$ $(l=0, 1, \ldots, j)$ и их производных порядка не выше $j$.

Более точно полученные результаты означают следующее. Функции $g_j(x, \xi, \lambda)$ принадлежат $C^\infty$ по переменным $x, \xi$ и определены при $\lambda\in S_{\delta/2}=\{\lambda\colon |\pi-\arg\lambda|<\delta/2\}$. Функции $g_j$ (как это следует из (5.1.16)) однородны в следующем смысле. Пусть

$$g_{j,\alpha',s,r}(x, \xi, \lambda)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^{\alpha'} \eta^s\left(\frac{\partial}{\eta\partial\eta}\right)^r g_j(x, \xi, \lambda),$$

тогда

$$g_{j',\alpha',s,r}(x, t\xi, t^m\lambda)=t^{j-|\alpha'|-2r+s} g_{j,\alpha',s,r}(x, \xi, \lambda) \qquad (5.1.17)$$

при $|\xi|\geqslant 1$, $t\geqslant 1$. По переменной $x$ функция $g_j$ принадлежит $C^\infty$. Точнее, функция $g_j$ удовлетворяет либо условию (i), либо (ii), причем $g_{-m}$ — условию (i), и для каждого $R$ и каждого компакта $U$ существует постоянная $C>0$ такая, что

$$|D_x^\beta g_{j,\alpha',r,s}|\leqslant C(|\xi|+\lambda^{1/m})^{j-|\alpha'|-2r+s} \qquad (5.1.18)$$

при $|\lambda|\geqslant R$.

Дальнейшему изучению свойств $g_j$ предпошлем одно вспомогательное утверждение. Обозначим через $T_\xi^\zeta g(\xi, \zeta)$ обобщенный сдвиг $g$, определяемый по следующей формуле (см. также § 1.8):

$$T_\xi^\zeta(\xi, \zeta)=\Gamma(\nu+1)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\int_0^\pi g(\xi'-\zeta', \sqrt{\eta^2+z^2-2\eta z\cos\theta}, \zeta)\sin^{2\nu}\theta\, d\theta.$$

Отметим, что сдвиг берется только по переменной $\xi$.

Лемма 5.1.1. *Пусть функция* $g(\xi, \zeta, \lambda)$, *где* $\xi=(\xi', \eta)$, $\zeta=(\zeta', z)\in\in\mathbb{R}^{n+1}$, *удовлетворяет неравенству*

$$|g(\xi, \zeta, \lambda)|\leqslant c(p)(1+|\xi|)^{-p}(|\zeta|+|\lambda|^{1/m})^j$$

*для любых вещественных p. Здесь* $|\lambda|\geqslant R>0$, $j<0$. *Тогда оператор* $\mathcal{G}_\lambda$, *определяемый по формуле*

$$\widehat{\mathcal{G}_\lambda u}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^{n+1}} T_\xi^\zeta g(\xi, \zeta, \lambda)\hat{u}(\xi)(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta,$$

*действует из* $S_+$ *в* $S_+$ *и допускает оценку*

$$\| \mathcal{G}_\lambda u \|_{s+q,\nu}\leqslant \mathrm{const}\cdot \| u \|_{s,\nu} |\lambda|^{(q+j)/m}$$

*при* $0\leqslant q\leqslant -j$, $|\lambda|\geqslant R>0$, *причем постоянная не зависит от* $\lambda$ *и* $u$.

Доказательство. По неравенству Коши имеем

$$\| \mathcal{G}_\lambda u \|^2_{s+q,\nu}=\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+|\xi|^2)^{s+q}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi \times$$
$$\times\Big| \int_{\mathbb{R}^{n+1}} T_\xi^\zeta g\hat{u}(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta\Big|^2\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+|\xi|^2)^{s+q}\times$$
$$\times(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi\int T_\xi^\zeta|g|(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta \int_{\mathbb{R}^{n+1}} T_\xi^\zeta |g||\hat{u}|^2(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta. \quad (5.1.19)$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$J\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n+1}} T_\xi^\zeta|g|(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\cdot \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (T_\xi^\zeta(1+|\xi|^{-p})(|\zeta|+|\lambda|^{1/m})^j(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta. \quad (5.1.20)$$

С другой стороны,

$$(|\zeta|+|\lambda|^{1/m})^j\leqslant \mathrm{const}\cdot(1+|\zeta|)^{-q}|\lambda|^{(q+j)/m} \quad (5.1.21)$$

при $|\lambda|\geqslant R>0$, $0\leqslant q\leqslant -j$. Подставляя эту оценку в (5.1.20), получаем

$$J\leqslant \mathrm{const}\cdot|\lambda|^{(q+j)/m}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (T_\xi^\zeta(1+|\xi|)^{-p})(1+|\zeta|)^{-q}(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta=$$
$$=\mathrm{const}\cdot|\lambda|^{(q+j)/m}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+|\xi|)^{-p}T_\xi^\zeta(1+|\zeta|)^{-q}(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\cdot|\lambda|^{(q+j)/m}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+|\zeta|)^{-p+2\nu+1}(1+|\xi+\zeta|)^{-q}d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\cdot|\lambda|^{(q+j)/m}(1+|\xi|)^{-q}.$$

В последнем соотношении $p$ выбрано достаточно большим и использовано соответствующее неравенство Петре. Подставляя последнее неравенство в (5.1.19) и изменяя порядок интегрирования, имеем

$$\| \mathcal{G}_\lambda \|^2_{s+q,\lambda}\leqslant \mathrm{const}\cdot|\lambda|^{(q+j)/m}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi\int_{\mathbb{R}^{n+1}} T_\xi^\zeta|g||\hat{u}|(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta=$$
$$=\mathrm{const}\cdot|\lambda|^{(q+j)/m}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\hat{u}|^2(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{n+1}} T_\xi^\zeta|g|(1+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi. \quad (5.1.22)$$

Используя неравенство Петре, оценку (5.1.21) и самосопряженность оператора обобщенного сдвига для внутреннего интеграла в (5.1.22), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} T_\xi^\zeta |g| (1+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}} (\eta^2)^{\nu+1/2} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot |\lambda|^{(q+j)/m} (1+|\zeta|)^{-q} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} T_\xi^\zeta (1+|\xi|)^{-p} (1+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}} (\eta^2)^{\nu+1/2} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot |\lambda|^{(q+j)/m} (1+|\zeta|)^{-q} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+|\xi|)^{-p+2\nu+1} (1+|\xi+\zeta|^2)^{s+\frac{q}{2}} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot |\lambda|^{(q+j)/m} (1+|\zeta|^2)^s.$$

Последнее неравенство и завершает доказательство леммы.

Прямым следствием оценки (5.1.18) и леммы 5.1.1 является следующая

Лемма 5.1.2. *Оператор* $\text{Op}(\varphi g_j)$, *построенный по функции* $\varphi(x) g_j(x, \xi, \lambda)$, *допускает оценку*

$$\| \text{Op}(\varphi g_j) u \|_{s+q,\nu} \leqslant c |\lambda|^{-1+q/m} \| u \|_{s,\nu} \qquad (5.1.23)$$

*для любых вещественных* $s$, $0 \leqslant q \leqslant m$.

Лемма 5.1.3. *Оператор* $R_N$, *построенный по формуле* (5.1.16), *допускает оценку*

$$\| R_N u \|_{s+q+N-2m,\nu} \leqslant C \| u \|_{s,\nu} |\lambda|^{-1+q/m},$$

*где* $N \geqslant m$, $0 \leqslant q \leqslant m$ *и* $s$ — *произвольное вещественное число.*

Для доказательства леммы 5.1.3 нужно использовать оценку (5.1.23) и оценку остаточного члена из соответствующей формулы Тейлора, но необходимо точно проследить зависимость от параметра $\lambda$.

Относительно параметрикса на многообразии заметим следующее. Пусть $\Omega$ — бесконечно дифференцируемое многообразие с краем, а $\{V_\mu\}$ — конечное множество координатных окрестностей, которые диффеоморфны (соответствующий диффеоморфизм обозначается $\varkappa_\mu$) областям $V'_\mu$ в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ $(y>0)$. Дополнительно предполагается, что естественное отображение соответствующих частей $V'_\mu$ оставляет инвариантными нормали к гиперплоскости $y=0$. Заметим, что речь идет о нормалях для образов, т. е. для областей в $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Пусть $V_\mu$ — такая координатная окрестность и функции $\varphi$, $\psi$, $\theta \in C^\infty(V_\mu)$, причем их образы $\varphi^* = \varkappa_\mu \varphi$, $\psi^* = \varkappa_\mu \psi$, $\theta^* = \varkappa_\mu \theta$ принадлежат классу $C^\infty_{+,0}(V'_\mu \cup \Gamma'_\mu)$, где $\Gamma'_\mu = \partial V'_\mu \cap \{y=0\}$, и пусть $\varphi\psi = \varphi$, $\psi\theta = \psi$.

Пусть $A$ — эллиптический сингулярный оператор на $\Omega$ порядка $m$, главная часть которого удовлетворяет сформулированным выше условиям. Пусть в каждой координатной окрестности в локальных координатах

$$\varkappa_\mu \theta A \theta \varkappa_\mu^{-1} = \sum_{j \leqslant m} \text{Op}(g_j).$$

Заметим, что функции $a_j(x', y, \xi)$ предполагаются продолженными на все $R^{n+1}$ по закону четности по $y$, так как по смыслу они определены выше лишь для $y>0$.

Положим

$$H(\lambda)=\sum_{-N\leqslant j\leqslant -m}\mathrm{Op}(\psi^* g_j)\ \text{ и }\ Q(\lambda)=\varphi\varkappa_\mu^{-1}H(\lambda)\varkappa_\mu\psi.$$

На основании предыдущих рассмотрений имеем

$$\|Q(A-\lambda)\theta-\varphi\|_{H^s_{\nu,+}\to H^{s+q+N-2m}_{\nu,+}}\leqslant|\lambda|^{-1+q/m};$$

для $0\leqslant q\leqslant m$ пространства $H^s_{\nu,+}$ определены в гл. III.

Выберем специальное разбиение единицы $\{\varphi_\mu\}$, $\Sigma\varphi_\mu=1$ (см. гл. III и IV), подчиненное покрытию $\{V_\mu\}$ такое, что $\varkappa_\mu^{-1}\varphi_\mu\in C^\infty_{+,0}(V'_\mu\cup\Gamma'_\mu)$ и $\frac{\partial}{\partial y}\varkappa_\mu^{-1}\varphi_\mu\equiv 0$ в некоторой окрестности $\Gamma'_\mu$. Положим $Q=\Sigma\varphi_\mu Q(\lambda)$. Оператор $Q$ и является параметриксом (конечного порядка) для оператора $A$. Точнее, справедлива

Теорема 5.1.1. *Имеет место оценка*

$$\|Q(A-\lambda)u-u\|_{s+q+N-2m,\nu}\leqslant C\|\lambda\|^{-1+q/m}.$$

Теорема 5.1.2. *Оператор $A-\lambda$ при достаточно больших $\lambda\in S_{\delta/2}$ обратим и справедлива оценка*

$$\|(A-\lambda)^{-1}\|_{H^s_{\nu,+}\to H^{s+q}_{\nu,+}}\leqslant\mathrm{const}\cdot|\lambda|^{-1+q/m},\qquad 0\leqslant q\leqslant m.$$

Доказательство теоремы проводится по обычной схеме и использует оценки, полученные в предыдущей теореме.

## § 5.2. Ядра дробных степеней

Сначала докажем, что дробные степени сингулярных эллиптических операторов являются с.п.д.о., и вычислим их символы. Предположим, что $O\bar{\in}\operatorname{sp}A$, т. е. оператор $A$ обратим. Как это подразумевается далее, $A$ определен на многообразии с краем с областью определения, состоящей из четных $C^\infty$-функций. Вводя некоторый множитель, можем добиться, чтобы $|a_m(x,\xi)|\geqslant\varepsilon>1$ при всех $x$ и $\xi$. Пусть $\Lambda$ — контур на комплексной плоскости, идущий из $-\infty$ до 1 по вещественной оси в верхней полуплоскости, затем по единичной окружности и далее по лучу $\arg\lambda=-\pi$.

Здесь неявно предполагается, что выполнены условия на оператор $A$, изложенные на с. 154—155. Из них следует, что в угле $S_\delta$ вида нет точек спектра, а предположение на с. 160 (что $O\bar{\in}\operatorname{sp}A$ и что $|a_m|>1$) показывает, что их нет и в единичном круге.

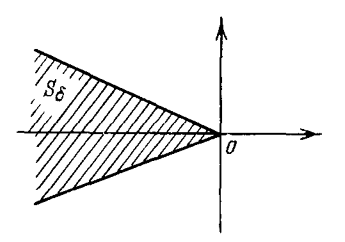


Рис. 1

Пусть сначала $\mathrm{Re}\,s<0$. Оператор $A_s$ определим формулой

$$A_s=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda\lambda^s(A-\lambda)^{-1}\,d\lambda,\qquad(5.2.1)$$

где через $\lambda_s$ обозначена главная ветвь $\lambda^s$ на комплексной плоскости с разрезом по

отрицательной части вещественной оси. Из теоремы 5.1.2 следует сходимость интеграла (5.2.1) в операторной топологии. Имеет место

Теорема 5.2.1. *Операторы $A_s$ являются с.п.д.о. порядка ms и в каждой координатной окрестности в локальных координатах их символы вычисляются по формуле*

$$\sigma(A_s) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \lambda^s g_{-j-m}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} h_{-j-m}(x, \xi, s). \qquad (5.2.2)$$

(Здесь $\Sigma$ понимается в асимптотическом смысле.) Эта теорема доказывается с помощью общих соображений, основанных на построениях § 5.1, и поэтому доказательство опускается.

Отметим только следующую формулу, которая используется ниже:

$$h_{-m-j}(x, \xi, s) = \sum_{k=0}^{2j} \frac{(-1)^k}{k!} \chi_{kj}(x, \xi)\, s(s-1)\dots(s-k+1)\left[a_m(x, \xi)\right]^{s-k}, \quad (5.2.3)$$

где $\chi_{kj}$ — многочлены от $a_m$, ..., $a_{m-l}$ и их производных до порядка $j$, определенные в § 5.1.

Формула (5.2.3) следует из (5.2.2) и (5.1.16). В самом деле,

$$h_{-m-j} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \lambda^s g_{-m-j}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda =$$

$$= -\sum_{k=0}^{2j} \chi_{kj}(x, \xi) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \lambda^s (a_m(x, \xi) - \lambda)^{-k-1}\, d\lambda,$$

и последний интеграл вычисляется с помощью вычетов.

Функции $\chi_{kj}$ являются однородными степени $2(k_{m-j})$ по переменной $\xi$. При $j > 0$ суммирование в (5.2.3) начинается с $k=1$.

Нетрудно убедиться, что $A_s$ — аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s < 0$ со значениями в банаховой алгебре операторов в пространстве $H^k_{\nu,+}$. Для этого достаточно продифференцировать в (5.2.1) по параметру $s$ под знаком интеграла. Кроме того, при целом $s < 0$ из голоморфности $\lambda^s$ по интегральной формуле Коши следует, что оператор $A_s = (A^{-1})^{-s} = A^s$ является соответствующей итерацией оператора $A^{-1}$. Из общей теории банаховых алгебр (см. [30]), что, впрочем, можно доказать и чисто аналитически, следует также групповое свойство

$$A_s A_t = A_{s+t}, \quad \mathrm{Re}\, s < 0, \quad \mathrm{Re}\, t < 0.$$

Оператор $A^s$ определяем по формулам

$$A^s = A_s, \quad \mathrm{Re}\, s < 0, \quad A^s = A^k A_{s-k}, \qquad (5.2.4)$$
$$k \text{ — целое}, \quad -1 \leqslant \mathrm{Re}\, s - k < 0.$$

Из результатов § 5.1 и определения $A^s$ непосредственно следует (области определения операторов $A^s$ различны)

Теорема 5.2.2. *Операторы* $A^s$, *определяемые по формуле* (5.2.4), *обладают групповым свойством, причем каждый оператор является с.п.д.о. порядка* $ms$ *с символом, определяемым формулой* (5.2.2) *для всех* $s$. *Функция* $A^s$ *в полуплоскости* $\mathrm{Re}\, ms<l$ *есть аналитическая со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих из* $H^k_{\nu,+}$ *в* $H^{k-l}_{\nu,+}$. *Оператор* $A^s$ *осуществляет изоморфизм пространств* $H^k_{\nu,+}$ *и* $H^{k-m\mathrm{Re}s}_{\nu,+}$.

Перейдем теперь к изучению ядер операторов $A^s$. Из теории распределений Л. Шварца (учитывая только весовой характер пространств) следует существование у оператора $A^s$ ядра, которое мы обозначим через $A_s(x, z)$, где $x=(x', y)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $z=(z', t)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Мы изучим сейчас свойство ядра $A_s(x, z)$ по всем трем переменным $x$, $z$, $s$.

Введем пространство $C^k_+(\Omega)$ (см. § 5.1 и гл. III) как множество функций $u$ таких, что в каждых локальных координатах $u\in C^k_{+,0}(V'_\mu\cup\Gamma'_\mu)$, причем последний класс состоит из функций из пространства $C^k_0$, для которых все производные нечетного порядка, не превосходящие $k$, обращаются в нуль на $\Gamma'_\mu$. Норма $C^k_+(\Omega)$ вводится естественным образом.

Пусть $U\subset\mathbb{R}^{n+1}_+=\{y>0\}$ — произвольная область, $\Gamma$ — часть ее границы, лежащая на гиперплоскости $y=0$ ($\Gamma$ может быть и пустым). Имеет место (см. гл. III)

Лемма 5.2.1. *При* $k<l-n/2-\nu-1$ *имеет место вложение*

$$H^l_{\nu,+}(U)\subset C^k_+(U\cup\Gamma) \tag{5.2.5}$$

*вместе с соответствующей топологией.*

Если расстояние от $U$ до гиперплоскости $\{y=0\}$ положительно (т. е. $\Gamma=\varnothing$), то вложение (5.2.5) имеет место уже при $k<l-(n+1)/2$.

В качестве непосредственного следствия леммы 5.2.1 можно привести вложение

$$H^l_{\nu,+}\subset C^k_+(\bar\Omega), \tag{5.2.6}$$

справедливое при $k<l-n/2-\nu-1$; если же отступить от края многообразия, то вложение (5.2.6) имеет место уже при $k<l-(n+1)/2$.

Лемма 5.2.2. *Для целого* $k\geqslant 0$ *ядро* $A_s(x, z)$ *есть аналитическая функция комплексного переменного* $s$ *при* $\mathrm{Re}(ms)<-n-1-(2\nu+1)-k$ *со значениями в* $C^k_+(\bar\Omega\times\bar\Omega)$. *Если рассматриваются точки* $x$, $z$ *внутри многообразия, то это имеет место уже при* $\mathrm{Re}(ms)<-n-1-k$.

Доказательство. Для положительного $\varepsilon$ оператора $A^s$ представляет собой аналитическую функцию со значениями в пространстве операторов

$$H^{-\varepsilon-n/2-\nu-1}_{\nu,+}\to H^{\varepsilon+n/2+\nu+1}_{\nu,+}$$

при $\mathrm{Re}(ms)<-n-1-(2\nu+1)-2\varepsilon$. Тогда на основании рассуждений общего характера (см. [159]) ядро $A_s(x, z)$ непрерывно на $\bar\Omega\times\bar\Omega$ и, следовательно, функция $s\mapsto A_s$ со значениями в $C_+(\bar\Omega\times\bar\Omega)$ аналитична. Трудностей при переходе от $C_+$ к $C^k_+$ не возникает, поскольку всякая производная

$$D^{\alpha'}_{x'}B^{\alpha_{n+1}}_y D^{\beta'}_{z'}B^{\beta_{n+1}}_t A_s$$

ядра $A_s(x, z)$ порядка $|\alpha'|+2\alpha_{n+1}+|\beta'|+2\beta_{n+1}=k$ есть, очевидно, ядро оператора $P_1 A^s P_2$, где $P_1$ и $P_2$ — сингулярные дифференциальные операторы, причем $\operatorname{ord} P_1+\operatorname{ord} P_2=k$. С помощью второй части леммы 5.2.1 доказывается оставшаяся часть утверждения леммы.

Поведение функции $A_s(x, z)$ вне диагонали $x=z$ описывается следующим утверждением:

Лемма 5.2.3. *Пусть $M$ — подмногообразие многообразия $\Omega\times\Omega$, расположенное на положительном расстоянии от диагонали. Тогда сужение функции $A_s(x, z)$ на $M$ принадлежит $C_+^\infty(M)$ и является голоморфной функцией на всей комплексной плоскости по переменной $s$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\int_\Lambda \lambda^s(Q(\lambda)-(A-\lambda)^{-1})\,d\lambda=P, \tag{5.2.7}$$

где $Q$ — параметрикс порядка $N$. Пусть $\mathscr{P}(x, z)$ — ядро оператора $P$. Тогда при $\operatorname{Re} s<1$ функция $\mathscr{P}(x, z)\in C^k$ при $k\leqslant N-2m-n-1-(2\nu+1)$.

Следовательно, особенности ядра оператора $\int\limits_\Lambda \lambda^s Q\,d\lambda$ совпадают при достаточно большом $N$ с особенностями $A_s(x, z)$. Так как наши рассуждения локальны, то достаточно теперь изучить операторы вида

$$\int_\Lambda \lambda^s \operatorname{Op}(g_j)\,d\lambda=\operatorname{Op}(h_j).$$

Ядро $\mathscr{H}_j$ оператора $\operatorname{Op}(h_j)$ можно вычислить в явном виде. Например, если функция $h_j(x, z)=h_i(x, \xi, s)$ удовлетворяет условию (i), то

$$\mathscr{H}_j(x, z)=C_{\nu,n}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(\xi',x'-z')}j_\nu(y\eta)j_\nu(t\eta)\,h_j(x, \xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}\,d\xi=$$
$$=C_{\nu,n}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} T_x^z\big[e^{i(\xi',x')}j_\nu(y\eta)\big]\,h_j(x, \xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}\,d\xi, \tag{5.2.8}$$

где $T_x^z$ — оператор обобщенного сдвига. Так как

$$\Delta_B^l e^{i(\xi',x')}j_\nu(y\eta)\overset{\text{def}}{=}\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial\xi_k^2}+B_\eta\right)^l e^{i(\xi',x')}j_\nu(y\eta)=(-1)^l|x|^{2l}e^{i(\xi',x')}j_\nu(y\eta),$$

то при $z\neq x$ имеем

$$\mathscr{H}_j(x, z)=C_{\nu,l}(-1)^l\int_{\mathbb{R}^{n+1}} T_x^z\big[|x|^{-2l}e^{i(\xi',x')}j_\nu(y\eta)\big]\times$$
$$\times\Delta_B^l h_j(x, \xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}\,d\xi. \tag{5.2.9}$$

Интеграл (5.2.9) сходится при $\operatorname{Re}(sm)<-m-j-n-1-(2\nu+1)+2l$. Тем самым получено аналитическое продолжение функции $\mathscr{H}_j$, первоначально определенной по формуле (5.2.8), на эту полуплоскость $s$-плоскости. Производные $D_{x'}^{\alpha'}B_y^{\alpha_{n+1}}D_{z'}^{\beta'}B_t^{\beta_{n+1}}$ порядка $p$ функции $\mathscr{H}_j(x, z)$ могут быть аналитически продолжены в область $\operatorname{Re}(ms)<m-j-n-1-(2\nu+1)-2l-p$. В силу произвольности $l$ лемма для $\operatorname{Re} s<1$ доказана в четном случае. В нечетном случае, когда

$h_j(x, \xi)$ удовлетворяет условию (ii), имеем

$$\mathscr{H}(x, z)=C_{\nu,n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(\xi', x'-z')}\eta j_{\nu+1}(y\eta) j_\nu(t\eta) h_j(x, \xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}\, d\xi=$$

$$=C_{\nu,n}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(\xi', x'-z')} j_\nu(y\eta) j_\nu(t\eta)\frac{1}{y\eta} h_j(x, \xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}\, d\xi-$$

$$-C_{\nu,n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(\xi', x'-z')} j_\nu(y\eta) j_\nu(t\eta)\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y} h_j(x, \xi)\right](\eta^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\, d\xi.$$

Второй интеграл в последнем выражении имеет тот же вид, что и рассмотренный выше, а первый допускает представление вида

$$C_{\nu,n}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} T_x^z\left[|x|^{-2l} e^{i(\xi', x')} j_\nu(y\eta)\right]\Delta_B^l\left[\frac{1}{y\eta} h_j(x, \xi)\right](\eta^2)^{\nu+1/2}\, d\xi$$

и, следовательно, сходится при $\operatorname{Re}(ms)<-m-j-n-(2\nu+1)+2l$. Лемма для $\operatorname{Re} s<1$ доказана. Для остальных значений она доказывается по схеме, предложенной в следующем утверждении.

До сих пор мы рассматривали поведение ядра вне диагонали. Изучим теперь его поведение на диагонали.

Теорема 5.2.3. 1. *Пусть $\bar{x}$ — точка, лежащая на границе $\Omega$. Тогда ядро $A_s(\bar{x}, \bar{x})$, как функция $s$, может быть аналитически продолжено из полуплоскости $\operatorname{Re}(ms)<-n-1-(2\nu+1)$ на всю комплексную плоскость, за исключением точек $s=(k-n-2\nu-2)/m$, $k=0$, 1, 2, ..., которые будут простыми полюсами.*

2. *Если $\bar{x}$ — внутренняя точка $\Omega$, то функция $A_s(\bar{x}, \bar{x})$ может быть аналитически продолжена из полуплоскости $\operatorname{Re}(ms)<-n-1-(2\nu+1)$ на всю комплексную плоскость, за исключением простых полюсов $s=\dfrac{k-n}{m}$, $k=0, 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Основная трудность сосредоточена в доказательстве второй части теоремы, первая же часть доказывается следующим образом.

По формуле (5.2.8) при $x=z$, $y=0$ имеем

$$\mathscr{H}_j(x, x, s)=C_{\nu,n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} h_j(x, \xi, s)(\eta^2)^{\nu+1/2}\, d\xi=C_{\nu,n}\Big\{\int\limits_{|\xi|<1}+\int\limits_{|\xi|>1}\Big\}. \quad (5.2.10)$$

Первый интеграл справа в (5.2.10) есть целая функция $s$. Используя однородность функции $h_j(x, \xi, s)$ при $|\xi|\geqslant 1$ по $\xi$, второй интеграл можно привести к виду

$$\int\limits_{|\xi|>1} h_j(x, \xi, s)(\eta^2)^{\nu+1/2}\, d\xi=-(n+1+2\nu+1+ms+m+j)^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_{|\xi|=1} h_j(x, \xi, s)(\eta^2)^{\nu+1/2}\, d\xi.$$

Аналогичны рассмотрения в случае, когда $h_j$ удовлетворяет условию (ii). Первая часть в случае $\operatorname{Re} s<1$ доказана. Для остальных $s$ она доказывается стандартным способом с использованием представления

$$A^s = A^k A^{s-k} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda} \lambda^{s-k} A^k (A-\lambda)^{-1}\, d\lambda$$

при $k<\operatorname{Re} s<k+1$. Переходим к доказательству второй части. Нам необходимо исследовать интеграл

$$\mathscr{H}_j = C_{\nu,n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} [j_\nu(y\eta)]^2 h_j(x, \xi, s)(\eta^2)^{\nu+1/2}\, d\xi. \tag{5.2.11}$$

Рассмотрим сначала простейший интеграл вида

$$\int\limits_0^1\int\limits_1^\infty j_\nu^2(by\eta)\,\eta^{2\nu+1}\,\eta^\lambda\, d\eta\, dy = f_b(\lambda). \tag{5.2.12}$$

При $b=0$ непосредственным подсчетом находим, что

$$f_0(\lambda) = \mathrm{const}\cdot\frac{1}{\lambda+(2\nu+1)+1}.$$

Следовательно, $f_0(\lambda)$ имеет простой полюс при $\lambda=-1-(2\nu+1)$. Пусть теперь $b>0$, тогда

$$f_b(\lambda) = \int\limits_1^\infty \eta^{2\nu+1+\lambda}\, d\eta \int\limits_0^1 j_\nu^2(by\eta)\, y^{2\nu+1}\, dy.$$

Производя замену переменной по формуле $y\eta=\tau$, получаем при помощи интегрирования по частям

$$f_b(\lambda) = \int\limits_1^\infty \eta^{2\nu+1+\lambda}\, d\eta \int\limits_0^\eta j_\nu^2(br)\, r^{2\nu+1}\,\eta^{-2\nu-2}\, dr = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_1^\infty j_\nu^2(b\eta)\,\eta^{2\nu+1+\lambda}\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 j_\nu^2(br)\, r^{2\nu+1}\, dr = f_b^1(\lambda)+f_b^2(\lambda).$$

Для изучения поведения $f_b^1(\lambda)$ воспользуемся асимптотическим разложением бесселевых функций (см. [14]) при $\eta\to\infty$. Имеем

$$j_\nu^2(b\eta)\,\eta^{2\nu+1} = \cos^2(b\eta)\sum_{j=0}^{N} C'_j\,\eta^{-2j} + \sin(2b\eta)\sum_{j=0}^{\infty} C''_j\,\eta^{2j-1} + \sin^2(b\eta)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{N} C'''_j\,\eta^{-2j-2} + r_N(\eta), \tag{5.2.13}$$

где остаток $r_N(\eta)$ допускает при $|\eta|>1$ оценку вида

$$|r_N(\eta)| \leqslant \mathrm{const}\cdot\eta^{-2N-1},$$

откуда следует, что

$$-\lambda f_b^1(\lambda)=\int_1^\infty \eta^\lambda j_\nu^2(b\eta)\,\eta^{2\nu+1}\,d\eta=\sum_{j=0}^N C_j'\int_1^\infty \eta^{\lambda-2j}\cos^2(b\eta)\,d\eta+$$

$$+\sum_{j=0}^N C_j''\int_1^\infty \sin(2b\eta)\,\eta^{\lambda-2j-1}\,d\eta+\sum_{j=0}^N C_j'''\int_1^\infty \sin^2(b\eta)\,\eta^{\lambda-2j-2}\,d\eta+$$

$$+\int_1^\infty \eta^\lambda r_N(\lambda)\,d\lambda=v_1+v_2+v_3+S_N(\lambda).$$

Далее имеем

$$\int_1^\infty \eta^{\lambda-2j}\cos^2(b\eta)\,d\eta=\frac{1}{2}\int_1^\infty \eta^{\lambda-2j}\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^\infty \eta^{\lambda-2j}\cos(2b\eta)\,d\eta=\frac{1}{2(\lambda-2j+1)}+\tilde v_1(\lambda).$$

Отсюда и из формулы

$$\int_1^\infty \eta^{\lambda-2j}\cos(2b\eta)\,d\eta=\frac{\sin(2b)}{2b}-\int_1^\infty (\lambda-2j)\,\eta^{\lambda-2j-1}\sin(2b\eta)\,d\eta,$$

показывающей, что $\tilde v_1(\lambda)$ — целая функция, заключаем, что $v_1(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение на всю плоскость, за исключением точек $\lambda=2j-1$, которые будут простыми полюсами.

Функция $v_2(\lambda)$ — целая. Чтобы в этом убедиться, достаточно, как и в предыдущей формуле, проинтегрировать по частям. Случай функции $v_3$ сводится к $v$ в силу формулы $\sin^2 z=1-\cos^2 z$. Наконец, функция $S_N(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<2N+1$. Стало быть, имеет место формула

$$-f_b^1(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_1^\infty \eta^\lambda j_\nu^2(b\eta)\,\eta^{2\nu+1}\,d\eta=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^N \frac{c_j}{\lambda-2j+1}+r_N(\lambda)\right],$$

где $\tilde r_N(\lambda)$ может быть аналитически продолжена в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda<2N$. Окончательно имеем

$$f_b(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_0^1 j_\nu^2(br)\,r^{2\nu+1}\,dr-\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^N \frac{c_j}{\lambda-2j+1}+\tilde r_N(\lambda)\right].$$

Для доказательства второй части теоремы нужно исследовать функцию

$$f(\lambda)=\int_{|\xi|=1} h_j(x,\xi,\lambda)\,d\xi\int_1^\infty j_\nu^2(y\eta r)\,\eta^{2\nu+1}r^{2\nu+1+\lambda}\,dr$$

при $y>0$. Разбиваем внешний интеграл на два:

$$\int_{|\xi|=1}=\int_{\substack{|\xi|=1\\|\eta|>1/2}}+\int_{\substack{|\xi|=1\\|\eta|<1/2}}.$$

Соответственно этому разбиению получаем $f=f'+f''$. Для изучения $f'$ непосредственно применяется асимптотическое разложение (5.2.13). Следовательно, функция $f'(\lambda)$ имеет простые полюса в точках $\lambda=0$, $\lambda=2j-1$ $(j=0, 1, ...)$. Для нахождения полюсов $f''$ произведем замену переменных по формуле $\xi'=\zeta\sqrt{1-\eta^2}$, при которой часть сферы $|\xi|=1$, $|\eta|<1/2$ преобразуется в часть цилиндрической поверхности $|\eta|<1/2$, $|\zeta'|=1$. Якобиан этого преобразования $J(\zeta', \eta)$ принадлежит классу $C_+^\infty$, следовательно,

$$f''(\lambda)=\int_{-1/2}^{1/2} d\eta \int_{|\xi'|=1} h_j(x, \zeta'\sqrt{1-\eta^2}, \eta, \lambda)\times$$
$$\times J(\zeta, \eta)\, dS \int_1^\infty j_\nu^2(y\eta r)(\eta r)^{2\nu+1} r^\lambda\, dr.$$

Разлагая функцию $h_j$ в новых переменных по формуле Тейлора, находим

$$\tilde{h}_j(x, y, \lambda)\overset{\text{def}}{=}\int_{|\zeta'|=1} h_j(x, \zeta'\sqrt{1-\eta^2}, \eta, \lambda)\, J(\zeta', \eta)\, dS=$$
$$=\tilde{h}_1^{(1)}(x, \lambda)+\tilde{h}_j^{(2)}(x, \lambda)\,\eta^2+\ldots+\tilde{h}_j^{(N)}\eta^{2N-2}+R_N(x, \eta, \lambda),$$

причем в правой части функции $\tilde{h}_j^{(k)}$, $R_N$ аналитичны по $\lambda$ на всей плоскости и $|R_N|\leqslant \text{const}\cdot|\eta|^{2N-1}$. Объединяя последние формулы, получаем

$$f''(\lambda)=2\sum_{k=0}^{N} h_j^{(k)}(x, \lambda)\int_0^{1/2}\eta^{2k}\int_1^\infty j_\nu(y\eta r)(\eta r)^{2\nu+1} r^\lambda dr+\tilde{R}_N.$$

Поступая в дальнейшем так же, как при изучении функции $f_b(\lambda)$, получаем, что $f''(\lambda)$ имеет простые полюса в точках $\lambda=-1, 0, 1, 2, \ldots$ Теорема доказана.

Замечание. Если мы находимся на множестве, где сосредоточены особенности оператора $A$ по переменной $y$, то, как следует из доказанной теоремы, распределение полюсов ядра дробной степени $A$ зависит от вида особенности (наличие постоянной $2\nu+1$), если же сдвинуться с этого множества, то $A$ превращается в регулярный эллиптический оператор, и наши результаты совпадают с классическими результатами Р. Сили [159] и других авторов.

## § 5.3. Формула среднего значения и ядра дробных степеней $\Delta_B$

Пусть $\mathbb{R}^N$ — евклидово пространство точек $(x', y)$, где $x'=(x_1, ..., x_{N-1})$, $y=x_N$. Через $\mathbb{R}_+^N$ обозначим полупространство $y>0$. Пусть $\Omega^+$ — ограниченная область с границей $\Gamma$, расположенная в $\mathbb{R}_+^N$ и прилегающая к гиперплоскости $y=0$. Участок границы $\Gamma$, лежащий на гиперплоскости $y=0$, обозначим через $\Gamma^0$, а участок границы $\Gamma$, лежащей в полупространстве $y>0$, обозначим через $\Gamma^+$.

Пусть $u, v \in C_+^2(\Omega)$ — четные по переменной $y$. Введем в рассмотрение дифференциальный оператор вида

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + y^{-k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y^k \frac{\partial}{\partial y}\right)\right), \tag{5.3.1}$$

где $k$ — фиксированное положительное число, $y>0$. С помощью формулы интегрирования по частям нетрудно убедиться, что для оператора $\Delta_B$ имеет место вторая формула Грина

$$\int_{\Omega^+} (v\Delta_B u - u\Delta_B v)\, y^k dx'\, dy = \int_{\Gamma^+} \left(v\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \bar{n}}\right) y^k d\Gamma. \tag{5.3.2}$$

Пусть $s' = (s_1, \ldots, s_{N-1})$. Положим в формуле (5.3.2)

$$v(x', y, s', 0) = \left[(N+k-2)\, r^{N+k-2}\right]^{-1} + W,$$

где $r^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - s_i)^2 + y^2$, $W = (N+k-2)^{-1}\left(r^{2-N-k} - R^{2-N-k}\right)$, $R$ — число. С помощью стандартной схемы рассуждений получаем следующее интегральное представление:

$$-\int_{\Omega^+} v\Delta_B u y^k dx'\, dy = \pi^{\frac{N-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{N+k}{2}\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times\, u(s', 0) + \int_{\Gamma^+} \left(u\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right) y^k d\Gamma. \tag{5.3.3}$$

Возьмем в формуле (5.3.3) в качестве области полушар $K_R^+$ радиуса $R$ с центром в точке $P' = (s', 0)$. Замечая, что в формуле (5.3.3)

$$v = \left[(N+k-2)\, r^{N+k-2}\right]^{-1} - \left[(N+k+2)\, R^{N+k-2}\right]^{-1},$$

получаем следующее тождество:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k+N}{2}\right)}{\pi^{\frac{N-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) R^{N+k-1}} \int_{w_R^+} u(x', y)\, y^k dw = u(s', 0) +$$
$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{k+N}{2}\right)(N+k-2)^{-1}}{\pi^{\frac{N-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int_{K_R^+} \left(r^{2-N-k} - R^{2-N-k}\right) \Delta_B u y^k dx'\, dy, \tag{5.3.4}$$

где $w_R^+$ — граница полушара $K_R^+$ в полупространстве $y \geqslant 0$. Вместо тождества (5.3.4) можно получить тождество более общего характера, из которого получается разложение в ряд Тейлора для среднего

значения

$$\frac{1}{C_{N,k}R^{N+k-1}}\int\limits_{w_R^+} u(x',y)\,y^k dw,$$

где $C_{N,k}=\pi^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{k+N}{2}\right)$, рассматриваемого как функция радиуса $R$ при фиксированном центре $P=(s',0)$. Используя схему рассуждений из монографии Р. Куранта, Д. Гильберта [123], мы находим, что для любой $u\in C_+^{2m+2}(\bar{\Omega}^+)$ и для любого полушара $K'_R$, целиком лежащего в $\Omega^+$ с центром на $\Gamma^0$, имеет место тождество

$$\frac{1}{C_{N,k}R^{N+k-1}}\int\limits_{w_R^+} u(x',y)\,y^k dw=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{m}\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)\left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu}\left[\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{N+k}{2}\right)\right]^{-1}\Delta_B^{\nu}u(s',0)+$$
$$+\int\limits_{K'_R} v_m\Delta_B^{m-1}uy^k dx'dy, \qquad (5.3.5)$$

где $v_m$ — решение соответствующей рекуррентной системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение $\Delta_B u=-\lambda u$. Имеем $\Delta_B^{\nu}u=(-1)^{\nu}\lambda^{\nu}u$, $\Delta_B^{m+1}u=(-1)^{m+1}\lambda^{m+1}u$.

В этом случае остаточный член в формуле (5.3.5) стремится к нулю с возрастанием $m$, и потому имеет место формула

$$C_{N,k}^{-1}R^{1-N-k}\int\limits_{w_R^+} u(x',y)\,y^k dw=$$
$$=\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)u(s',0)\sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\left[\Gamma\left(\nu+\frac{N+k}{2}\right)\right]^{-1}\left(\frac{R\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2\nu}=$$
$$=\Gamma\left(\frac{N+k}{2}\right)u(s',0)\left(\frac{R\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{\frac{2-N-k}{2}} j_{\frac{N+k-2}{2}}\left(R\sqrt{\lambda}\right). \qquad (5.3.6)$$

Полагая $x'=s'+R\theta'$, $y=R\theta_N$, учитывая, что $dw_R=R^{N-1}dw_1$, формулу (5.3.6) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_{w_1^+} u(s'+R\theta',R\theta_N)\,\theta_N^k dw_1=$$
$$=\pi^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)u(s',0)\left(\frac{R\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{\frac{2-N-k}{2}} j_{\frac{N+k-2}{2}}\left(R\sqrt{\lambda}\right), \qquad (5.3.7)$$

где $j_{\frac{N+k-2}{2}}$ — функция Бесселя первого рода. Таким образом, для всякой полусферы с центром на $\Gamma_0$, целиком лежащей в $\Omega^+$, и всякого достаточно гладкого решения уравнения $\Delta_B u+\lambda u=0$, четного по последней переменной, имеет место формула среднего значения вида (5.3.7). Другой метод вывода формулы среднего значения типа (5.3.7) для решения $\Delta u+\lambda u=0$ имеется в [15].

Для получения формулы типа формулы (5.3.7), в которой бы справа фигурировало значение функции и во внутренней точке, используется оператор обобщенного сдвига. В этом случае формула среднего значения имеет следующий вид:

$$\int\limits_{w_1^+} T^t_{R\theta_N} u(s'+R\theta',\, R\theta_N)\, dw_1 = \pi^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)u(s',\,t)\left(\frac{R\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{\frac{2-N-k}{2}} J_{\frac{N+k-2}{2}}(R\sqrt{\lambda}). \quad (5.3.8)$$

При $t=0$ формула (5.3.8) совпадает с формулой среднего значения (5.3.7).

Рассмотрим теперь (см. [106]) разложение частной функции, имеющей особенность в одной точке, в ряд Фурье по собственным функциям $\Delta_B u+\lambda u=0$ в области $\Omega^+$ с однородными краевыми условиями.

Пусть $P'=(s',\,0)$ — любая внутренняя точка $\Gamma^0$, минимум расстояния которой от границы $\Gamma^0$ превосходит $R$. Рассмотрим следующую частную функцию, имеющую в точке $P'$ особенность вида $r^\varepsilon$ $(\varepsilon>-(N+k))$:

$$v(P',\,Q)=\begin{cases} r^\varepsilon_{P'Q}-R^\varepsilon & \text{при } r\leqslant R,\\ 0 & \text{при } r\geqslant R,\end{cases} \quad (5.3.9)$$

где $r^2_{P'Q}=r^2=\sum\limits_{i=1}^{N-1}(x_i-s_i)^2+y^2$, $Q=(x',\,y)$, $s'=(s_1,\,\ldots,\,s_{N-1})$.

С помощью формулы о среднем (5.3.7) можно показать (см. [102], [108]), что коэффициент Фурье $v_i$ функции $v$ относительно собственной функции $u_i(x',\,y)$, отвечающей собственному значению $\lambda_i$, имеет следующий вид:

$$v_i=\lambda_i^{\frac{-N-k-\varepsilon}{2}}u_i(s',\,0)\,C_\varepsilon^{[N+k]}+2^{\frac{N+k-2}{2}}\pi^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)u_i(s',\,0)\times$$

$$\times\left\{\sum_{l=1}^{n}R^{\frac{N+k}{2}+\varepsilon-l}\lambda_i^{\frac{-N-k-l}{2}} j_{\frac{N+k}{2}+l}(R\sqrt{\lambda_i})(0-\varepsilon)(2-\varepsilon)\times\ldots\times[2(l-1)-\varepsilon]\right\}-$$

$$-2^{\frac{N+k-2}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\lambda_i^{\frac{-N-k-\varepsilon}{2}}u_i(s',\,0)(0-\varepsilon)\ldots(2n-\varepsilon)\times$$

$$\times\int\limits_{R\sqrt{\lambda_i}}\rho^{\frac{N+k}{2}+\varepsilon-n-1} j_{\frac{N+k}{2}+n}(\rho)\,d\rho, \quad (5.3.10)$$

где $C_\varepsilon^{[N+k]}$ — постоянная, зависящая от $\varepsilon$ и $N+k$. Формула (5.3.10) справедлива для $\varepsilon > -(N+k)$ и любого номера $n$ при условии, что $\varepsilon$ и $n$ связаны неравенствами $\frac{N+k}{2}+\varepsilon-n-1<\frac{1}{2}$. Последний интегральный член в формуле (5.3.10) можно кратко записать в виде

$$u_i(s', 0)\,O\big(\lambda_i^{\frac{-N+k+3}{4}-\frac{n}{2}}\big).$$

Оценка $O$-членов в последней формуле равномерна относительно $\lambda_i$ и точки $P'$ при условии, что точка $P'$ принадлежит строго внутренней подобласти области $\Gamma^0$.

Для выяснения специфики коэффициентов Фурье $v_i$ функции (5.3.9) используем методику из [43]. Далее вычисляем коэффициент Фурье функции (5.3.9) относительно сдвинутой собственной функции $T_y^t u_i(x', y)$. Для такой функции имеем

$$\bar{v}_i=\int\limits_{\Omega} T_y^t u_i(x', y)\, v(x', y;\ s', 0)\, y^k dx' dy. \tag{5.3.11}$$

Коэффициент Фурье $\bar{v}_i$ можно также записать в виде формулы, аналогичной формуле (5.3.10). При выяснении специфики в образовании коэффициентов Фурье $\bar{v}_i$ используется формула среднего значения (5.3.8).

Изучим характер коэффициентов Фурье для гладкой функции, имеющей особенность в одной точке. Рассмотрим функцию $F^{[n]}(P', Q)$, обладающую в точке $P'$ особенностью вида $r^\varepsilon\,(\varepsilon > -(N+k))$ и имеющей всюду, кроме этой точки, непрерывные производные до порядка $n$ включительно.

Коэффициент Фурье $F_i^{[n]}$ функции $F^{[n]}$ с помощью формулы о среднем (5.3.7) можно представить [105], [106] в виде

$$F_i^{[n]}=C_\varepsilon^{[N+k]}\lambda_i^{\frac{-N-k-\varepsilon}{2}}u_i(s', 0)+u_i(s', 0)\,O\left(\lambda_i^{-\frac{N+k+3}{4}-\frac{n}{2}}\right). \tag{5.3.12}$$

С помощью второй формулы о среднем (5.3.8) коэффициент Фурье функции $F^{[n]}$ относительно $T_y^t u_i(x', y)$ представляется соответственно в виде

$$\bar{F}_i^{[n]}=C_\varepsilon^{[N+k]}\lambda_i^{\frac{-N-k-\varepsilon}{2}}u_i(s', t)+u_i(s', t)\,O\left(\lambda_i^{-\frac{N+k+3}{4}-\frac{n}{2}}\right). \tag{5.3.13}$$

Формулы (5.3.12) и (5.3.13) показывают, что соответствующий коэффициент Фурье распадается на две части: первая часть его существенно зависит от особенности функции и не изменяется при увеличении гладкости; вторая часть характеризует гладкость функции и порядок убывания этой части с возрастанием гладкости.

Рассмотрим также разложение функции, обладающей особенностью вида $r^{2m}\lg r$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$. Пусть $F_1^{[n]}(P', Q)$ — функция, имеющая в точке $P'$ особенность вида $r^{2m}\lg r$ и обладающая всюду, кроме

этой точки, непрерывными производными до $n$-го порядка включительно. Используя формулу о среднем (5.3.7), находим (см. [102], [108]), что коэффициент Фурье $F_{1i}^{[n]}$ в этом случае имеет вид

$$F_{1i}^{[n]}=C_{1m}^{[N+k]}\lambda_i^{-\frac{N+k}{2}-m}u_i(s',0)+u_i(s',0)O\left(\lambda_i^{-\frac{N+k+3}{4}-\frac{n}{2}}\right), \quad (5.3.14)$$

где $C_{1m}^{[N+k]}$ — постоянная, не зависящая от $m$ и $N+k$. С помощью теоремы о среднем (5.3.8) можно показать, что коэффициент Фурье $\bar{F}_{1i}^{[n]}$ функции $F_1^{[n]}$ относительно $T_y^t u_i(x', y)$ имеет вид

$$\bar{F}_{1i}^{[n]}=C_{1m}^{[N+k]}\lambda_i^{-\frac{N+k}{2}-m}u_i(s',t)+u_i(s',t)O\left(\lambda_i^{-\frac{N+k+3}{4}-\frac{n}{2}}\right). \quad (5.3.15)$$

Таким образом, и для функции, обладающей особенностью вида $r^{2m}\lg r$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$, коэффициент Фурье распадается на две части: одна из них характеризует особенность функции, другая — гладкость функции.

С помощью указанных выше результатов может быть найдена (см. [102]) такая функция $K_\alpha(P', Q)$, которая имеет своим рядом Фурье ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i(P')u_i(Q)/\lambda_i^\alpha, \quad (5.3.16)$$

где $\alpha$ — любое положительное действительное число.

Функцию $K_\alpha(P', Q)$, если она существует, естественно назвать ядром дробного порядка, так как она служит ядром следующего интегрального уравнения:

$$u_i(P')=\lambda_i^\alpha \int_{\Omega+} K_\alpha(P', Q)u_i(Q)y^k dx'\,dy. \quad (5.3.17)$$

При нахождении функции $K_\alpha(P, Q)$, которая имеет своим рядом Фурье билинейный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i(P)u_i(Q)/\lambda_i^\alpha, \quad (5.3.18)$$

где $P=(s', t)$ и $\alpha$ — положительное действительное число, используется оператор обобщенного сдвига $T_y^t$.

Опираясь на тот специальный вид, который имеет коэффициент Фурье для функции $F^{[n]}$, обладающей особенностью вида $r^\varepsilon$ $(\varepsilon>-(N+k))$, можно показать (см. [102]), что для любого положительного $\alpha\neq\frac{N+k}{2}+m$, где $m=0, 1, 2, \ldots$, ядро $K_\alpha(P', Q)$ существует и представляется в виде

$$K_\alpha(P', Q)=r^{2\alpha-(N+k)}/A_\alpha^{[N+k]}+\chi_\alpha(P', Q), \quad (5.3.19)$$

где $A_{\alpha}^{[N+k]}=\frac{1}{2}\pi^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)2^{2\alpha}\Gamma(\alpha)/\Gamma\left(\frac{N+k}{2}-\alpha\right)$, а функция $\chi_{\alpha}(P', Q)$ обладает внутри соответствующей области непрерывными производными сколь угодно высокого порядка. Функция $\chi_{\alpha}(P', Q)$ непрерывна по совокупности $P'$ и $Q$ при условии, что $Q$ принадлежит $\Omega^{+}$, а $P'$ — произвольной строго внутренней подобласти области $\Gamma^{0}$. Ядро $K_{\alpha}(P', Q)$ получается из ядра (5.3.19) с помощью оператора обобщенного сдвига по переменной $y$.

Используя специфику коэффициентов Фурье для функции $F_{\gamma}^{[p]}$, обладающей особенностью вида $r^{2m}\lg r$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$, аналогично доказывается, что для $\alpha=\frac{N+k}{2}+m$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ ядро $K_{\alpha}(P', Q)$ существует и представляется в виде

$$K_{\frac{N+k}{2}+m}(P', Q)=\left[A_{m}^{[N+k]}\right]^{-1}r^{2m}\lg r+\chi_{\frac{N+k}{2}+m}(P', Q), \tag{5.3.20}$$

где $A_{m}^{[N+k]}$ — постоянная, определяемая по соответствующей формуле. Функция $\chi_{\frac{N+k}{2}+m}(P', Q)$ обладает теми же свойствами, что и соответствующая функция в (5.3.19). Ядро $K_{\frac{N+k}{2}+m}(P, Q)$ получается из (5.3.20) с помощью оператора обобщенного сдвига и имеет следующий вид:

$$K_{\frac{N+k}{2}+m}(P, Q)=\left[A_{m}^{[N+k]}\right]^{-1}T_{y}^{t}r^{2m}\lg r+\chi'_{\frac{N+k}{2}+m}(P, Q). \tag{5.3.21}$$

## § 5.4. Асимптотические свойства спектральной функции сингулярного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

Пусть в области $\Omega^{+}$ задан дифференциальный оператор вида

$$\mathscr{L}(D_{x'}, B_{x_{n+1}})=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}\leqslant 2m} a_{\alpha}D_{x'}^{\alpha'}B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} \tag{5.4.1}$$

с постоянными коэффициентами $B$-эллиптического типа. Предположим, что $B$-эллиптический оператор $\mathscr{L}$ формально сопряжен и полуограничен снизу.

Оператор $\mathscr{L}$ как оператор из $C_{+,0}^{2m}(\overline{\mathbb{R}_{+}^{n+1}})$ в $L_{2,\gamma}(R_{+}^{n+1})$ имеет самосопряженное замыкание

$$A_0=F_B^{-1}\,aF_B, \tag{5.4.2}$$

где $F_B$ — преобразование Фурье — Бесселя, определяемое по формуле

$$F_B\varphi(\xi)=\int_{\mathbb{R}_{+}^{n+1}} e^{-i(\xi', x')}j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1})\varphi(x)x_{n+1}^{2\gamma}dx,$$

и $F_B^{-1}$ — обратное преобразование Фурье — Бесселя

$$F_B^{-1} f(x) = C_{n,\gamma} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{i(x,\xi)} j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1}) f(\xi) \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi,$$

где $C_{n,\gamma} = [(2\pi)^n 2^{2\gamma-1} \Gamma^2(\gamma - 1/2)]^{-1}$. В формуле (5.4.2) $a$ — оператор умножения в пространстве образов Фурье — Бесселя на символ оператора $\mathscr{L}$, т. е. на многочлен

$$a(\xi) = \sum_{|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} \leqslant 2m} a_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \xi_{n+1}^{2\alpha_{n+1}}.$$

Нетрудно показать, что проектор $E_{\lambda,0}$ спектрального разложения оператора

$$A_0 = \int_{\mu_0}^{\infty} \lambda \, dE_{\lambda,0},$$

где $\mu_0$ — нижняя грань спектра оператора $A_0$, действует по формуле

$$E_{\lambda,0} f(y) = \int_{\{a(\xi)<\lambda\} \cap R_+^{n+1}} F_B f(\xi) e^{i(\xi',y')} j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1}) \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi.$$

Далее имеем

$$E_{\lambda,0} f(y) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e_0(\lambda, x, y) f(x) x_{n+1}^{2\gamma} dx,$$

где $e_0(\lambda, x, y)$ — спектральная функция оператора $A_0$ (см. [51]) имеет следующий вид:

$$e_0(\lambda, x, y) = C_{n,\gamma} \int_{\mathbb{R}_1^{n+1} \cap \{a(\xi)<\lambda\}} e^{-i(x'-y',\xi')} \times$$
$$\times j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1}) j_{\gamma-1/2}(\xi_{n+1} y_{n+1}) \xi_n^{2\gamma} d\xi.$$

Пусть $\sigma(\lambda)$ — функция ограниченной вариации и пусть

$$\sigma^{(s)}(\lambda) = \Gamma^{-1}(s) \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda - \mu)^{s-1} (\lambda - \lambda_0)^{1-s} d\sigma(\mu)$$

— риссовское среднее порядка $s > 0$ функции $\sigma$ на интервале $(\lambda_0, \lambda)$. Рассмотрим оператор $\mathscr{L}$ на множестве $C_{+,0}^{\infty}(\Omega^+ \cup \Gamma^0)$, где $\Gamma^0$ — участок границы области $\Omega^+$, лежащей на гиперплоскости $x_{n+1} = 0$. Обозначим полуограниченное самосопряженное расширение оператора $\mathscr{L}$ в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\Omega^+)$ через $\tilde{A}$. Оператор $\tilde{A}$ имеет спектральное разложение

$$\tilde{A} = \int_{\mu}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda.$$

Как показано в [51], [52], для $\tilde{A}$ существует спектральная функция $e(\lambda, x, y)$. Отметим, что операторы $A_0$ и $\tilde{A}$ порождаются одним и тем же дифференциальным выражением $\mathscr{L} = \mathscr{L}(D_{x'}, B_{x_{n+1}})$.

Имеет место основная теорема (см. [52]) этого параграфа:

Теорема 5.4.1. *Пусть оператор* $\mathscr{L}$ *имеет постоянные коэффициенты* $\lambda_0<\min(\tilde{\mu}, \mu_0)$ *и* $n+2\gamma\geqslant 1$. *Тогда имеем*

$$e^{(s)}(\lambda, x, y)=e_0^{(s)}(\lambda, x, y)+O\left(\lambda^{\frac{n+2\gamma+1-s}{2m}}\right) \qquad (5.4.3)$$

*при* $s\geqslant 1$ *равномерно на компактных подмножествах множества* $(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)$. *При* $n\geqslant 1$ *имеем*

$$e^{(s)}(\lambda, x, y)=e_0^{(s)}(\lambda, x, y)+O\left(\lambda^{\frac{n+1\ \ s}{2m}}\right) \qquad (5.4.4)$$

*равномерно на компактных подмножествах* $\Omega^+\times\Omega^*$.

Приведенные оценки внутри области совпадают с хорошо известными оценками спектральной функции для эллиптических операторов, полученных Л. Гордингом [24], Л. Хёрмандером [169], Б. М. Левитаном [133].

В работе И. А. Киприянова [80] тауберовым методом найдены асимптотические формулы для $e(\lambda, x, y)$ и $N(\lambda)$ сингулярного $B$-эллиптического оператора, в который включены члены с младшим производным, не вполне непрерывными относительно «старших» членов. Здесь же мы приводим результаты [51], [52], где фактически получены оценки остатка в асимптотических формулах для $e(x, x, \lambda)$.

Доказательство теоремы 5.4.1 мы приводим в конце этого параграфа. Сначала рассматривается фундаментальное решение некоторого параболического оператора, соответствующего оператору $\mathscr{L}$, затем изучается асимптотика ядер билинейных форм соответствующих операторов $\tilde{A}$ и $A_0$.

Рассмотрим эрмитову форму

$$\left(e^{-tA_0}f, g\right)_{L_{2,\gamma}}\overset{\text{def}}{=}\left(e^{-tA_0}f, g\right)_\gamma=C_{n,\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-ta(\xi)}F(\xi)\bar{J}(\xi)\xi_{n+1}^{2\gamma}\,d\xi, \qquad (5.4.5)$$

где $t>0$, $F=F_Bf$, $J=F_Bg$. Форма (5.4.5) имеет ядро следующего вида:

$$u_0\left(t, x, y\right)=C_{n,\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-ta(\xi)-i(x'-y',\xi')}j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1})\times$$
$$\times j_{\gamma-1/2}\left(y_{n+1}\xi_{n+1}\right)\xi_{n+1}^{2\gamma}\,d\xi=\int e^{-t\lambda}d_\lambda e_0(\lambda, x, y). \qquad (5.4.6)$$

Лемма 5.4.1. *Функция* $u_0\in C^\infty(\mathbb{R}_+^1\times\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}\times\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. *Если функция* $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1\times\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$, *то функция*

$$\varepsilon\left(t, x\right)=\int\limits_\tau^\infty d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} u_0\left(t-\tau, y, x\right)f\left(\tau, y\right)y_{n+1}^{2\gamma}\,dy \qquad (5.4.7)$$

*принадлежит классу* $C^\infty$ $(\mathbb{R}_+^1\times\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ *и имеет место следующее соотношение:*

$$\left(\mathscr{L}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon\left(t, x\right)=f\left(t, x\right). \qquad (5.4.8)$$

*Кроме того, при* $t>0$

$$\left(\mathscr{L}+\frac{\partial}{\partial t}\right)u_0\left(t, x, y\right)=0. \qquad (5.4.9)$$

Доказательство этой леммы приведено в [52].

Рассмотрим теперь билинейную форму вида

$$(e^{-t\hat{A}} f, g)_{L_{2,\gamma}}, \tag{5.4.10}$$

где $f$, $g \in L_{2,\gamma}(\Omega^+)$ и $\hat{A}$ — полуограниченное самосопряженное расширение оператора $\mathscr{L}$, определенное в начале этого параграфа.

Форма (5.4.10) имеет ядро

$$u(t, x, y) = \int e^{-t\lambda} de(\lambda, x, y).$$

Следующая лемма дает оценку разности ядер $u$ и $u_0$.

Лемма 5.4.2. *Существует постоянная $c>0$ такая, что*

$$u(t, x, y) - u_0(t, x, y) = O(\exp(-ct^{-1/2m-1})) \tag{5.4.11}$$

*равномерно на компактных подмножествах* $(\Omega^+ \bigcup \Gamma^0) \times (\Omega^+ \bigcup \Gamma^0)$ *при* $t<1$.

Доказательство этой леммы использует результаты леммы 5.4.1 и весьма тонкое свойство бесселевой функции $j_\nu(z)$ при $\nu > -1/2$ и приведено в [53].

Перейдем к рассмотрению асимптотики спектральной функции. Определим функцию $\sigma_0$ формулой

$$\sigma_0(\lambda) = e_0(\lambda, x, x) + 2\,\mathrm{Re}[\chi e_0(\lambda, x, y)] + |\chi|^2 e_0(\lambda, y, y),$$

где $x, y \in R_+^{n+1}$ и $\chi$ — комплексное число.

Лемма 5.4.3. *Для каждого $\lambda_0$ существуют постоянные $K_1$, $K_2$ и $\lambda_1$, $\lambda_2 \geqslant \lambda_0$ такие, что функция*

$$K_1(\lambda - \lambda_0)^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}} - \sigma_0(\lambda) \tag{5.4.12}$$

*не убывает при* $\lambda \geqslant \lambda_1$ *и* $x, y \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, $\chi \in s_1 = \{|\chi| \leqslant 1\}$; *функция*

$$K_2(\lambda - \lambda_0)^{\frac{n+1}{2m}} - \sigma_0(\lambda) \tag{5.4.13}$$

*не убывает при* $\lambda \geqslant \lambda_2$, $(x, y, \chi) \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} \times \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} \times s$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $(x, y, \chi) \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} \times \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}} \times S_1$. Если $\mu > \lambda$, то непосредственным подсчетом проверяется формула

$$C_{n,\gamma}^{-1}(\sigma_0(\mu) - \sigma_0(\lambda)) = \int\limits_{\{\lambda < a(\xi) < \mu\} \bigcap \mathbb{R}_+^{n+1}} |j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1}) e^{i(x'-y', \xi')} +$$

$$+ \chi j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1})|^2 \xi_{n+1}^2 d\xi \leqslant 4 \int\limits_{\{\lambda < a < \mu\} \bigcap \mathbb{R}_+^{n+1}} \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi.$$

Переходя к полярным координатам по формуле $\xi = r\tilde{\xi}$, где $r = |\xi|$ и $d\xi = r^n dr\, d\tilde{\xi}$, получаем

$$\int\limits_{\{\lambda < a < \mu\} \bigcap \mathbb{R}_+^{n+1}} \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{C^1} d\tilde{\xi} \int\limits_{J(\xi)} r^n r^{2\gamma} dr,$$

где $C^1$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $J(\tilde{\xi})$ — интервал на оси, на которой $\lambda < a(r\tilde{\xi}) < \mu$. Разложим многочлен $a(\xi)$ на главную и младшую части

$$a(\xi) = \hat{a}(\xi) + b(\xi),$$

где $\hat{a}(\xi)$ — однородный многочлен степени $2m$; порядок $b(\xi)$ не превосходит $2m-1$. Тогда

$$a(r\tilde{\xi}) = r^{2m}\hat{a}(\xi) + b(r\tilde{\xi}),$$

причем $\hat{a}(\xi)$ имеет положительный минимум на $C^1$. Тогда для каждого $\lambda_0$ существуют постоянные $\lambda_1 > \lambda_0$ и $K_1$ такие, что $a(r\tilde{\xi})$ является неубывающей функцией $r$, которая удовлетворяет неравенству

$$\frac{dr}{da(r\tilde{\xi})} \leqslant K_1 \left[a(r\tilde{\xi}) - \lambda_0\right]^{\frac{1}{2m}-1}$$

и, кроме того,

$$r^{n+2\gamma} \leqslant K_1 \left[a(r\tilde{\xi}) - \lambda_0\right]^{\frac{n+2\gamma}{2m}}$$

при $\tilde{\xi} \in C^1$ и $r \geqslant \lambda_1$. Следовательно,

$$\int\limits_{\{\lambda < a < \mu\} \cap \mathbb{R}_+^{n+1}} \xi_{n+1}^{2\gamma}\, d\xi \leqslant K_1 \int\limits_{\lambda}^{\mu} d\left[a(r\tilde{\xi}) - \lambda_0\right]^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}}.$$

Первая часть леммы доказана. Рассмотрим теперь случай $(x, y, \chi) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1} \times s_1$. Имеем

$$C_{n,\gamma}^{-1}(\sigma_0(\mu) - \sigma_0(\lambda)) =$$

$$= \int\limits_{\{\lambda < a(\xi) < \mu\} \cap \mathbb{R}_+^{n+1}} |j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1}) e^{i(x'-y',\xi')} + \chi j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1})|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma}\, d\xi.$$

Если учесть, что

$$|j_\nu(t)| \leqslant \mathrm{const} \cdot t^{-\nu-1/2}, \qquad t > 0,$$

то последний интеграл допускает оценку

$$\int\limits_{\{\lambda < a(\xi) < \mu\} \cap \mathbb{R}_+^{n+1}} |j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1}) e^{i(x'-y',\xi')} + \chi j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1})|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{x_{n+1}^{2\gamma} + y_{n+1}^{2\gamma}}{(x_{n+1} y_{n+1})^{2\gamma}} \int\limits_{\{\lambda < a(\xi) < \mu\} \cap \mathbb{R}_+^{n+1}} d\xi.$$

Дальше все рассуждения повторяются (см. доказательство первой части леммы). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.4.1. Пусть $u(t, x, y)$ и $u_0(t, x, y)$ — функции, определенные выше. Введем $\sigma(\lambda)$ по формуле

$$\sigma(\lambda) = e(\lambda, x, x) + 2\,\mathrm{Re}\left[\chi e(\lambda, x, y)\right] + |\chi^2|\, e(\lambda, y, y),$$

где $u_0(t, x, y)$, как и раньше, — спектральная функция самосопряженного полуограниченного расширения $\tilde{A}$ оператора $\mathscr{L}$. Пусть $\lambda_0$ —

число, меньшее нижних граней спектров операторов $\tilde{A}$ и $A_0$, т. е. $\lambda<\min(\hat{A}, A_0)$. Тогда $\sigma(\lambda)-\sigma_0(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda\leqslant\lambda_0$ и по лемме 5.4.3 для любого компактного подмножества $S\subset(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times\times(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times S_1$ можно найти постоянные $K_1$ и $K_2$ такие, что функция

$$\sigma(\lambda)+K_1(\lambda-\lambda_0)^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}}-\sigma_0(\lambda)$$

не убывает при $\lambda\geqslant\lambda_1$. Для любого компактного подмножества $S\subset\Omega^+\times\Omega^+\times S_1$ по той же лемме 5.4.3 можно найти постоянные $K$ и $\lambda_2$ такие, что

$$\sigma(\lambda)+K_2(\lambda-\lambda_0)^{\frac{n+1}{2m}}-\sigma_0(\lambda)$$

не убывает при $\lambda\geqslant\lambda_2$.

Из леммы 5.4.2 находим, что

$$\int e^{-t\lambda}d(\sigma(\lambda)-\sigma_0(\lambda))=O(\exp(-ct^{-\frac{1}{2m-1}}))$$

равномерно на компактных подмножествах $(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times S_1$. Обозначим через $\mu$ число $\dfrac{n+1+2\gamma}{2m}$ при $(x, y, \chi)\in S$ для компактного множества $S\subset(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times S_1$ и равное $\dfrac{n+1}{2m}$ при компактных $S\subset\Omega^+\times\Omega^+\times S_1$; положим $\varepsilon=\dfrac{1}{2m-1}$. Так что по условию теоремы в обоих случаях $\mu(1+\varepsilon)\dfrac{1}{\varepsilon}\geqslant 2$. Применяя теперь тауберову теорему Г. Фрейда (см. [20]), убеждаемся, что средние Рисса $\sigma(\lambda)$ и $\sigma_0(\lambda)$ удовлетворяют соотношению

$$\sigma^{(s)}(\lambda)=\sigma_0^{(s)}(\lambda)+O(\lambda^{\frac{n+2\gamma-s+1}{2m}})$$

равномерно на компактных подмножествах $(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times S_1$. На компактных подмножествах $\Omega^+\times\Omega^+\times S_1$ имеем

$$\sigma^{(s)}(\lambda)=\sigma_0^{(s)}(\lambda)+O(\lambda^{\frac{n+1-s}{2m}}).$$

В силу произвольности $\chi_1$ такие же формулы верны для функций $e(\lambda, x, y)$ и $e_0(\lambda, x, y)$. Теорема доказана.

## § 5.5. Асимптотические свойства спектральной функции сингулярного дифференциального оператора с переменными коэффициентами

Рассмотрим в области $\Omega^+$ сингулярный дифференциальный оператор $\mathscr{L}(x, D'_{x'}, B_{x'_{n+1}})$ с переменными коэффициентами вида

$$\mathscr{L}(x, D'_{x'}, B_{x_{n+1}})=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}\leqslant 2m} a_\alpha(x)D^{\alpha'}_{x'}B^{\alpha_{n+1}}_{x_{n+1}}+\sum_{|\alpha|<2m} b_\alpha(x)D^\alpha_x, \qquad (5.5.1)$$

где $\alpha=(\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})=(\alpha', \alpha_{n+1})$, $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n+\alpha_{n+1}=|\alpha'|+\alpha_{n+1}$, $x=(x_1, ..., x_n, x_{n+1})=(x', x_{n+1})$, $D_x^\alpha=\left(\frac{\partial}{i\partial x_1}\right)^{\alpha_1}...\left(\frac{\partial}{i\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\left(\frac{\partial}{i\partial x_{n+1}}\right)^{\alpha_{n+1}}=$ $=D_{x'}^{\alpha'}\left(\frac{\partial}{ix_{n+1}}\right)^{\alpha_{n+1}}$, $B_{x_{n+1}}$ — оператор Бесселя, определяемый формулой

$$B_{x_{n+1}}=\frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}}+\frac{2\gamma}{x_{n+1}}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}.$$

Как и выше, $\gamma$ — фиксированное положительное число. Пусть комплексные коэффициенты (5.5.1) удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_\alpha(x)$, $b_\alpha(x)\in C_+^\infty(\Omega^+\cup\Gamma^0)$ при всех $\alpha$,

2) $(\partial/\partial x_{n+1})^k a_\alpha(x)=0$ при $|\alpha'|+2\alpha_{n+1}\leqslant 2m$, $x\in\Gamma^0$, $k\geqslant 1$, (5.5.2)

3) $(\partial/\partial x_{n+1})^k b_\alpha(x)=0$ при $|\alpha|<2m$, $x\in\Gamma^0$, $\alpha_{n+1}>0$, причем $b_\alpha(x)=0$ при $x\in\Gamma^0$, $\alpha_{n+1}>0$.

Оператор (5.5.1) называется *B-эллиптическим*, если многочлен

$$\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}=2m} a_\alpha(x)\xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}\xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\neq 0$$

ни при каких вещественных $\xi=(\xi_1, ..., \xi_n, \xi_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$, отличных от нуля.

*Формально сопряженным* к оператору (5.5.1) называется дифференциальный оператор $\mathscr{L}^+$ такой, что

$$(\mathscr{L}u, v)_{L_{2,\gamma}}=(u, \mathscr{L}^+v)_{L_{2,\gamma}}$$

для любых $u, v\in C_{+,0}^\infty(\Omega^+\cup\Gamma^+)$. Если коэффициенты сингулярного дифференциального оператора $\mathscr{L}$ удовлетворяют условиям (5.5.2), то $\mathscr{L}^+$ также имеет вид (5.5.1) (см. [51]) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (5.5.2).

Пусть $\hat{a}(x, \xi)$ — главный символ оператора $\mathscr{L}$, т. е.

$$\hat{a}(x, \xi)=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}=2m} a_\alpha(x)\xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}\xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

Так как оператор $\mathscr{L}$ является $B$-эллиптическим, то главный символ $\hat{a}(x, \xi)$ по определению не обращается в нуль ни при каких вещественных $\xi\neq 0$.

Пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное полуограниченное снизу расширение оператора $\mathscr{L}$. Тогда имеем

$$\tilde{A}=\int\lambda\, dE_\lambda.$$

Как показано в [52], для $\tilde{A}$ существует спектральная функция $e(\lambda, x, y)$. Пусть $\tau\in\Omega^+\cup\Gamma^0$. Рассмотрим оператор $\mathscr{L}_\tau$, получающийся из $\mathscr{L}(x, D'_{x'}, B_{x_{n+1}})$ сохранением старших членов и замораживанием коэффициентов в точке $\tau$. Оператор $\mathscr{L}_\tau(D', B)$ обладает самосопряженным замыканием, определяемым формулой

$$A_\tau=F_B^{-1}\hat{a}(\tau, \cdot)F_B,$$

где $F_B$ — преобразование Фурье — Бесселя, $\hat{a}(\tau, \cdot)$ — оператор умножения на $\hat{a}(\tau, \xi)$ в пространстве образов Фурье — Бесселя. Область определения оператора $A_\tau$ состоит из функций $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ таких, что

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |F_B f(\xi)|^2 |\hat{a}(\tau, \xi)|^2 \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi < \infty.$$

Пусть $\{E_{\lambda,\tau}\}$ — семейство проекторов спектрального разложения $A_\tau$. Тогда имеем

$$A_\tau = \int \lambda \, d_\lambda E_{\lambda,\tau}.$$

Нетрудно показать, что

$$(E_{\lambda,\tau} f)(y) = \int_{\{\hat{a}(\tau,\xi)<\lambda\} \cap \mathbb{R}^{n+1}_+} F_B f(\xi) e^{i(x',\xi')} j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1}) \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi. \tag{5.5.3}$$

Отсюда имеем

$$(E_{\lambda,\tau} f)(y) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} e_\tau(\lambda, x, y) f(x) x_{n+1}^{2\gamma} dx, \tag{5.5.4}$$

где спектральная функция $e_\tau(\lambda, x, y)$ оператора $A_\tau$ определяется формулой

$$e_\tau(\lambda, x, y) = C_{n,\gamma} \int_{\{\hat{a}(\tau,\xi)<\lambda\} \cap \mathbb{R}^{n+1}_+} e^{-i(x'-y',\xi')} j_{\gamma-1/2}(\xi_{n+1} x_{n+1}) \times \\ \times j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1}) \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi. \tag{5.5.5}$$

Интеграл (5.5.5) сходится, так как $\hat{a}(\tau, \xi)$ — положительно определенная форма. Из формулы (5.5.5) в силу известных асимптотических свойств функций Бесселя [8], так же как и в случае постоянных коэффициентов, получаем следующие оценки:

$$|e_\tau(\lambda, x, y)| \leqslant C\lambda^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}} \int_{\{\hat{a}(\tau,\xi)<1\} \cap \mathbb{R}^{n+1}_+} \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi,$$

когда $x$, $y$ лежат на гиперплоскости $x_{n+1} = 0$,

$$|e_\tau(x, x, y)| \leqslant C\lambda^{\frac{n+\gamma+1}{2m}} x_{n+1}^{-\gamma} \int_{\{\hat{a}(\tau,\xi)<1\} \cap \mathbb{R}^{n+1}_+} \xi^\gamma d\xi, \tag{5.5.6}$$

когда $y_{n+1} = 0$, $x_{n+1} > 0$. При $x_{n+1}$, $y_{n+1} > 0$ имеем

$$|e_\tau(\lambda, x, y)| \leqslant C\lambda^{\frac{n+1}{2m}} x_{n+1}^{-\gamma} y_{n+1}^{-\gamma} \int_{\{\hat{a}(\tau,\xi)<1\} \cap \mathbb{R}^{n+1}_+} d\xi.$$

В частности, при $x = y$, $x_{n+1} = 0$ получаем

$$e_\tau(\lambda, x, x) = C_{n,\gamma} \lambda^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}} \int_{\{\hat{a}(\tau,\xi)<1\}} \xi_{n+1}^{2\gamma} d\xi. \tag{5.5.7}$$

Интегралы в правых частях формул (5.5.6) и (5.5.7) конечны. Отметим, что оценки (5.5.6) спектральной функции $e_\tau$ внутри области $\Omega^+$, где нет особых точек у коэффициентов оператора $\mathscr{L}$, совпадают с извест-

ными оценками спектральной функции эллиптического оператора с гладкими коэффициентами (см., например, [24], [26]).

Рассмотрим одно вспомогательное утверждение. Положим

$$\hat{\sigma}(\lambda)=e_y(\lambda, x, x)+2\,\mathrm{Re}\,[\chi e_y(\lambda, x, y)]+|\chi|^2 e_y(\lambda, y, y),$$

где $\chi$ принадлежит замкнутому единичному кругу $S_1$ комплексной плоскости.

Лемма 5.5.1. *Для каждого компактного подмножества $S\subset(\Omega^+\bigcup\Gamma^+)\times R_+^{n+1}\times S_1$ существует постоянная $K_1$ такая, что функция $K_1\lambda^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}}-\hat{\sigma}(\lambda)$ является неубывающей функцией $\lambda\geqslant 0$ при $(y, x, \chi)\in S$. Для каждого компактного подмножества $S\subset\Omega^+\times\mathbb{R}_+^{n+1}\times S_1$ существует постоянная $K_2$ такая, что функция $K_2\lambda^{\frac{n+1}{2m}}-\hat{\sigma}(\lambda)$ не убывает при $\lambda\geqslant 0$ и $(y, x, \chi)\in S$.*

Доказательство. Непосредственным подсчетом проверяется, что

$$\sigma(\lambda)=C_{n,\gamma}\int\limits_{\{\hat{a}(y,\xi)<\lambda\}}|j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1})e^{i(x'-y',\xi')}+$$
$$+\chi j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1})|^2\xi_{n+1}^{2\gamma}\,d\xi.$$

Отсюда в случае компактного подмножества $S\subset(\Omega^+\bigcup\Gamma^+)\times\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}\times S_1$ получаем

$$C^{-1}\frac{d}{d\lambda}\sigma(\lambda)\leqslant 4\frac{d}{d\lambda}\int\limits_{\{\hat{a}(y,\xi)<\lambda\}\bigcap\mathbb{R}^{n+1}}\xi_{n+1}^{2\gamma}\,d\xi=$$
$$=4\frac{n+2\gamma+1}{2m}\lambda^{\frac{n+2\gamma-2m+1}{2m}}\int\limits_{\{\hat{a}(y,\xi)<1\}\bigcap\mathbb{R}_+^{n+1}}\xi_{n+1}^{2\gamma}\,d\xi.$$

Так как последний интеграл ограничен на компактных подмножествах $\Omega^+\bigcup\Gamma^0$, то первое утверждение леммы доказано. В случае $(y, x, \chi)\in$ $\in S\subset\Omega^+\times\mathbb{R}_+^{n+1}\times S_1$ переменные $y_{n+1}>0$, $x_{n+1}>0$. В силу известной асимптотики функции Бесселя имеем

$$C_{n,\gamma}^{-1}\frac{d}{d\lambda}\sigma(\lambda)\leqslant\frac{d}{d\lambda}\int\limits_{\{\hat{a}(y,\xi)<\lambda\}\bigcap\mathbb{R}_+^{n+1}}(|j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}y_{n+1})|^2+$$
$$+|j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1})|^2\xi_{n+1}^{2\gamma})\,d\xi\leqslant C\frac{d}{d\lambda}\int\limits_{\{\hat{a}(y,\xi)<\lambda\}\bigcap\mathbb{R}_+^{n+1}}\left(\frac{1}{x_{n+1}^{2\gamma}\xi_{n+1}^{2\gamma}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{y_{n+1}^{2\gamma}\xi_{n+1}^{2\gamma}}\right)\xi_{n+1}^{2\gamma}\,d\xi=\frac{C(x_{n+1}^{2\gamma}+y_{n+1}^{2\gamma})}{x_{n+1}^{2\gamma}y_{n+1}^{2\gamma}}\times\frac{d}{d\lambda}\int\limits_{\{\hat{a}(y,\xi)<\lambda\}\bigcap\mathbb{R}_+^{n+1}}=$$
$$=\frac{C(n+1)(\chi_{n+1}^{2\gamma}+y_{n+1}^{2\gamma})}{x_{n+1}^{2\gamma}y_{n+1}^{2\gamma}}\lambda^{\frac{n-2m+1}{n}}\int\limits_{\{\hat{a}(y,\xi)<1\}\bigcap\mathbb{R}^{n+1}}d\xi.$$

Так как последнее выражение ограничено на компактном подмножестве $S \subset \Omega^+ \times \mathbb{R}_+^{n+1} \times S_1$, то и второе утверждение леммы доказано.

Теорема 5.5.1. *При* $\lambda \to \infty$ *имеем*

$$e(\lambda, x, y) = e_x(\lambda, x, y) + O(\lambda^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}}) \tag{5.5.8}$$

*равномерно на компактных подмножествах* $(\Omega^+ \bigcup \Gamma^0) \times (\Omega^+ \bigcup \Gamma^0)$ *и, кроме того,*

$$e(\lambda, x, y) = e_x(\lambda, x, y) + O(\lambda^{\frac{n+1}{2m}}) \tag{5.5.9}$$

*равномерно на компактных подмножествах* $\Omega^+ \times \Omega^+$.

Доказательство. Так же как и в работе [80], рассмотрим эрмитову форму

$$\mathcal{G}_t(f, f') = \theta((\lambda + t)^{-2s}, f, f'),$$

где $t$ — вещественное число, большее нижней грани спектра оператора $\tilde{A}$, $s$ — целое неотрицательное число и форма определяется соотношением

$$\theta(\varkappa, f, f') = (\varkappa(\hat{A}) f, f')_{L_{2,\gamma}} = \int \varkappa(\lambda)\, d(E_\lambda f, f')_{L_{2,\gamma}}.$$

В соответствии с [51] эта форма имеет ядро

$$g_t(x, y) = \int (\lambda + t)^{-2s} de(\lambda, x, y).$$

Из свойств спектральной меры вытекает [80], что билинейная форма

$$C(f, f') = t^{2s} \mathcal{G}_t(f, f')$$

равномерно ограничена при $t > 1$ и $t$, бóльших нижней грани спектра оператора $\tilde{A}$, и удовлетворяет тождеству

$$C(bf, f') = C(f, b^+ f') = (f, \bar{f}')_{L_{2,\gamma}}, \quad f, f' \in C^\infty_{+,0}(\Omega^+ \bigcup \Gamma^+),$$

где $b = t^{-2s}(\mathcal{L} + t)^{2s}$ и $b^+$ — дифференциальный оператор, формально сопряженный к оператору $b$, т. е.

$$(f, bf')_{L_{2,\gamma}} = (b^+ f, f')_{L_{2,\gamma}}, \quad f, f' \in C^\infty_{+,0}(\Omega^+ \bigcup \Gamma^+).$$

Положим $\tau = t^{1/2m}$. Тогда

$$b(\tau, x, D_{x'}, B_{x_{n+1}}) = \sum_{|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} = 4ms} b_\alpha(\tau, x) \tau^{-|\alpha'| - 2\alpha_{n+1}} \times$$
$$\times D_{x'}^{\alpha'} B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} + \sum_{|\alpha| < 4ms} \tilde{b}_\alpha(\tau, x) \tau^{-|\alpha|} D_x^\alpha,$$

где $b_\alpha$, $\tilde{b}_\alpha$ — полиномы от $\tau^{-1}$.

Из свойств 1)—3) коэффициентов оператора $\mathcal{L}$ следует, что

$$b(\tau, x, \tau\xi) = (\hat{a}(x, \xi) + 1)^{2s} + O(\tau^{-1}) |\xi|^{4ms-1} \tag{5.5.10}$$

равномерно на компактных подмножествах множества $\Omega^+ \bigcup \Gamma^0$.

Обозначим главную часть оператора $b$ через $b_0$, т. е. положим

$$b_0(\tau, x, D_{x'}, B_{x_{n+1}}) = \sum_{|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} = 4ms} b_\alpha(\tau, x) \tau^{-|\alpha'| - 2\alpha_{n+1}} D_{x'}^{\alpha'} B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}.$$

То, что главная часть $b_0$ имеет указанный вид, вытекает из обобщенной формулы типа формулы Лейбница. Полином по $\xi$

$$b_0(\tau, x, \xi)=\sum_{|\alpha'|+2\alpha_{n+1}=4ms} b_\alpha(\tau, x)(\xi')^{\alpha'}\xi_{n+1}^{2\alpha_{n+1}}$$

обладает тем свойством, что

$$b_0^{-1}(\infty, x, \xi)=O(1)(1+|\xi|^{4ms})^{-1}$$

равномерно на компактных подмножествах множества $\Omega^+\bigcup\Gamma^+$.

Пусть $\Phi(\tau, x, y)$ и $\Phi^+(\tau, x, y)$ — фундаментальные решения операторов $b$, $b^+$ соответственно (определение и свойства фундаментальных решений см. в [80], где фундаментальные решения соответственно обозначены $\Gamma$ и $\Gamma^*$).

Из результатов работы [80] следует, что форма $C$ обладает непрерывным ядром $C(\tau, x, y)$, которое отличается от фундаментального решения $\Phi^+$ на член $O(\tau^{-N})$ для любого натурального $N$ равномерно на компактных подмножествах множества $(\Omega^+\bigcup\Gamma^+)\times(\Omega^+\bigcup\Gamma^+)$. Из [80] следует также, что $\Phi^+$ отличается от

$$\varepsilon^+(x, y)=C_{n,\gamma}\int_{R^{n+1}} e^{i(x'-y', \xi')}j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1})\times$$
$$\times j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1})[b^+(\tau, y, \xi)]^{-1}\xi_{n+1}^{2\gamma}\,d\xi$$

на член $O(\tau^{n+2\gamma+1-\varepsilon})$ для любого $\varepsilon$. Из формулы (5.5.10) следует, что $\varepsilon^+$ отличается от интеграла

$$\tau^{n+2\gamma+1}C_{n,\gamma}\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{i(x'-y', \xi')}j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1})\times$$
$$\times j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1})[\hat{a}(y, \xi)+1]^{2s}\xi_{n+1}^{2\gamma}\,d\xi$$

на член $O(\tau^{n+2\gamma})$. Поэтому

$$g_t(x, y)=C_{n,\gamma}\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-i(x'-y', \xi')}j_{\gamma-1/2}(x_{n+1}\xi_{n+1})\times$$
$$\times j_{\gamma-1/2}(y_{n+1}\xi_{n+1})[\hat{a}(y, \xi)+t]^{2s}\xi_{n+1}^{2\gamma}\,d\xi+O\left(t^{\frac{n+2\gamma+1-4ms}{2m}}\right) \quad (5.5.11)$$

равномерно на компактных подмножествах множества $(\Omega^+\bigcup\Gamma^+)\times\times(\Omega^+\bigcup\Gamma^+)$. Далее

$$[\hat{a}(y, \xi)+t]^{-2s}=-\int_{\hat{a}(y,\xi)}^{\infty} d\lambda(\lambda+t)^{-2s}.$$

Если поставить это выражение в предыдущую формулу и изменить порядок интегрирования, то соответствующий интеграл принимает следующий вид:

$$\int(\lambda+t)^{-2s}de_y(\lambda, x, y).$$

Из соотношения (5.5.11) следует, что

$$\int(\lambda+t)^{-2s}de_y(x, y)=\int(\lambda+t)^{-2s}de_y(\lambda, x, y)+O\left(t^{\frac{n+2\gamma+1-4ms}{2m}}\right). \quad (5.5.12)$$

Пусть $\chi\,(|\chi|=1)$ — комплексное число. Положим

$$\sigma(\lambda)=e(\lambda, x, y)+2\mathrm{Re}[\chi e(\lambda, x, y)]+|\chi|^2 e(\lambda, y, y).$$

Функции $\sigma(\lambda)$, $\hat{\sigma}(\lambda)$ не убывают, $\hat{\sigma}(\lambda)=0$, $\lambda\leqslant 0$. Из формулы (5.5.12) следует, что

$$\int(\lambda+t)^{-2s}d\sigma(\lambda)=\int(\lambda+t)^{-2s}d\hat{\sigma}(\lambda)+O\left(t^{\frac{n+2\gamma+1-4ms}{2m}}\right)$$

равномерно на компактном множестве $S\subset(\Omega^+\bigcup\Gamma^+)\times\times(\Omega^+\bigcup\Gamma^+)\bigcup S_1$. Кроме того,

$$\int\limits_{-\infty}^{0}(\lambda+t)^{-2s}d\sigma(\lambda)=O\left(t^{-2s}\right).$$

В силу леммы 5.5.1 найдется постоянная $K_1$ такая, что функция

$$\beta(\lambda)=\sigma(\lambda)+K_1\lambda^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}}-\hat{\sigma}(\lambda)$$

не убывает при $\lambda\geqslant 0$, $(x, y, \chi)\in S$. Поэтому

$$\int\limits_{0}^{\infty}(\lambda+t)^{-2s}d\beta(\lambda)=K_1\int\limits_{0}^{\infty}(\lambda+t)^{-2s}d\lambda^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}}+O\left(t^{\frac{n+2\gamma+1-4ms}{2m}}\right)$$

равномерно в $S$. В силу тауберовой теоремы Д. Караматы [49]

$$\sigma(\lambda)=\hat{\sigma}(\lambda)+O\left(\lambda^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}}\right).$$

Отсюда в силу произвольности $\chi$ находим, что

$$e(\lambda, x, y)=e_y(\lambda, x, y)+O\left(\lambda^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}}\right)$$

равномерно на компактных подмножествах множества $(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)\times\times(\Omega^+\bigcup\Gamma^0)$. Так как

$$e(\lambda, x, y)=\overline{e(\lambda, y, x)},$$

то

$$e(\lambda, x, y)=e_x(\lambda, x, y)+O\left(\lambda^{\frac{n+2\gamma+1}{2m}}\right).$$

Первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части теоремы проводится по той же схеме, нужно только в соответствующих местах использовать оценки внутри области [80] и вторую часть леммы 5.5.1.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Спектральным характеристикам линейных дифференциальных операторов в частных производных посвящены многочисленные работы. Обзор соответствующих разделов спектральной теории, к которым примыкают наши результаты, можно найти, например, в работах М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка [10], Ш. А. Алимова, В. А. Ильина, Е. М. Никишина [1], [2], Л. Хёрмандера [169], Б. М. Левитана [133], А. Г. Костюченко, Б. С. Митягина [116], Л. Гординга [24], [25], [26] и др.

Как известно, дробные степени эллиптических операторов играют весьма важную роль в спектральной теории и в других разделах теории краевых задач. Основой для их построения служит теория псевдодифференциальных операторов.

Комплексные степени $B$-эллиптических операторов были построены И. А. Киприяновым, В. В. Катраховым [54], отправляясь от работы R. T. Seeley [159].

При этом естественным образом было расширено понятие сингулярного п. д. о., введенного И. А. Киприяновым, Л. Н. Ляховым [86] с помощью преобразования Фурье—Бесселя (многомерный случай). Первоначально это расширение было выполнено в одномерном случае в работе И. А. Киприянова, В. В. Катрахова [92], в которой была фактически выяснена роль классических операторов преобразования Пуассона и Сонина при построении теории таких п. д. о. Доказано в одномерном случае, что операторы преобразования Сонина и Пуассона преобразуют сингулярные п. д. о. в классические операторы Кальдерона—Зигмунда. Справедливо и обратное утверждение. Это позволяет многие факты из теории п. д. о. в одномерном случае перенести на сингулярные п. д. о., в частности, положительно решить вопрос об алгебре сингулярных п. д. о. Из других результатов отметим связь между пространствами Соболева и весовыми функциональными пространствами, введенными в [63].

Новый класс сингулярных п. д. о. [92] также был введен с помощью преобразования Фурье—Бесселя, но только с двумя нормированными функциями Бесселя различных индексов. С этим преобразованием можно связать и другой класс сингулярных п. д. о., сопряженных в некотором смысле к оператору из [92]. Заметим, что вопрос об алгебре многомерных сингулярных п. д. о. из [86] до сих пор до конца положительно не решен. В связи с изложенным укажем на работу [141], где изучались сингулярные п. д. о. вида

$$\mathrm{Op}(a_m)=\int_0^\infty j_\nu(y\eta)a_m(y\eta)\hat{u}(\eta)\eta^{2\nu+1}d\eta, \qquad (*)$$

что соответствует нашему определению (см. также [54]) при выполнении условия (i). Было показано [141], что главный член произведения сингулярных п. д. о. указанного вида (*) также является сингулярным п.д.о того же вида и его символ равен произведению символов сомножителей. Этот результат не противоречит нашим рассуждениям, поскольку получить разложение младших членов в асимптотический ряд сингулярных п. д. о. вида (*) невозможно. В эллиптических задачах вид младших членов несуществен, поэтому [141] удалось построить теорию разрешимости сингулярных эллиптических краевых задач, соответствующих сингулярным п. д. о. вида (*) в многомерном случае.

Укажем еще на обзор Р. Кэррола [127], в котором в связи с работами [92], [54] предлагается несколько отличный от нашего подход к построению сингулярных п. д. о. Из результатов работ [53], [92] следует, что одномерные сингулярные п. д. о., введенные в них, образуют алгебру и в случае переменных коэффициентов. Примененный там метод операторов преобразования не удается распространить на многомерный случай сингулярных п. д. о. в пределах классических п. д. о.; однако некоторые результаты, в том числе и сами новые операторы преобразования (см. гл. II), могут быть использованы и в многомерном случае.

При изучении спектральных свойств дифференциальных операторов В. А. Ильин [43], [44], [45], [46] систематически использовал формулу среднего значения. Вследствие этого ему удалось уловить ряд тонких моментов при изучении спектральных разложений по собственным функциям оператора Лапласа.

Формула среднего значения для собственных функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка $\Delta_B$ была получена Н. И. Киприяновой [102], [108]. Существенную роль при этом, как в работах В. А. Ильина [43], [44], играет функция Бесселя первого рода. В двумерном случае формула среднего значения для собственных функций $\Delta_B$ в другом виде содержится в работе А. Вайнштейна [15]. Для итераций оператора $\Delta_B$ формула о среднем построена Н. И. Киприяновой [107], [109]. Конструкция ядер дробных степеней сингулярного оператора $\Delta_B$ приведена в работе Н. И. Киприяновой [102]. В работе И. А. Киприянова [80] тауберовым методом найдена асимптотика собственных значений и собственных функций $B$-эллиптических операторов, содержащих члены с младшими производными, не вполне непрерывными относительно «старших» членов. В этой же работе было замечено, что внутри области, т. е. там, где нет особенностей,

асимптотика совпадает с асимптотикой собственных значений и собственных функций для эллиптических операторов с гладкими коэффициентами (см., например, Л. Гординг [26], Л. Хёрмандер [169]).

Существование спектральной функции $e(\lambda, x, y)$ для сингулярного $B$-эллиптического оператора при соответствующем ограничении на поведение коэффициентов в окрестности сингулярной плоскости доказано в работе [51]; при этом используется аппарат весовых функциональных пространств, введенных И. А. Киприяновым [63], [59].

Асимптотические свойства спектральной функции сингулярного $B$-эллиптического оператора изучены В. В. Катраховым [51], [52], где на самом деле получены внутренние оценки остатка в асимптотических формулах для $e(\lambda, x, x)$ — формулы (5.4.3), (5.4.4), (5.5.8), (5.5.9) и оценки (5.5.6). Оценки внутри области, где отсутствуют особенности, совпадают с хорошо известными оценками спектральной функции для эллиптических операторов с регулярными коэффициентами, полученными Л. Гордингом [26], Л. Хёрмандером [169], Б. М. Левитаном [133]. Доказательство использует асимптотику билинейных форм, введенных И. А. Киприяновым [80], и тауберову теорему Ганелиуса [20]. Другой подход, берущий свое начало в работах В. А. Ильина [43], [45] для изучения асимптотического поведения спектральной функции сингулярного $B$-эллиптического оператора второго порядка $\Delta_B$, содержится в работах Н. И. Киприяновой [103], [104]. Доказательство соответствующих асимптотических формул основано на формуле среднего значения для собственных функций оператора $\Delta_B$ и соответствующих результатах [102] для ядер дробных степеней операторов $\Delta_B$.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений I // Успехи мат. наук.— 1976.— Т. 31, вып. 6.— С. 28—88.
2. Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений II // Успехи мат. наук.— 1977.— Т. 32, вып. 1.— С. 107—130.
3. Ахиезер Н. И. К теории спаренных и интегральных уравнений // Зап. Харьков. мат. о-ва.— 1957.— Т. 25.— С. 5—31.
4. Байдаков А. Н. О разрешимости краевых задач для линейных и квазилинейных уравнений *B*-эллиптического типа // Докл. АН СССР.— 1982.— Т. 266, № 2.— С. 265—267.
5. Байдаков А. Н. О разрешимости одной краевой задачи для квазилинейных *B*-эллиптических уравнений // Неклассические уравнения матем. физики.— Новосибирск, 1986.— С. 18—25.
6. Бабиков В. В. Методы фазовых функций в квантовой механике.— М.: Наука, 1976.— 287 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1973.— Т. 1.— 295 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1974.— Т. 2.— С. 95.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований.— М.: Наука, 1969.— 344 с.
10. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Математический анализ / ВИНИТИ.— М., 1974.— С. 5—28.
11. Богачев Б. М. О весовых пространствах с различными весами по разным переменным // Теоремы вложения и их приложения (Труды симпозиума по теоремам вложения, Баку — 1966).— М., 1969.— С. 28—34.
12. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье.— М., 1962.— С. 252—258.
13. Бродский А. Л. Некоторые теоремы вложения для одного класса сингулярных дробно-дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1976.— Т. 227, № 6.— С. 1285—1288.
14. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций.— М.: Иностр. лит., 1949.— Ч. 1.— 728 с.; Ч. 2.— 220 с.
15. Вайнштейн А. (Weinstein A.) Discontinious integrals and generalized potential theory //. Trans Amer. Math. Soc.— 1948.— V. 63.— P. 342—354.
16. Вайнштейн А. (Weinstein A.) The singular solution and Cauchy problem for generalized Tricomy equation. // Comm. Pure and Appl. Math.— 1954.— V. 7.— P. 105—116.
17. Вайнштейн А. (Weinstein A.) Singular partial Differential equations and Their Applications. // Proc. Symp. Univ. of Maryland.— 1961.— Fluid Dynamic and Appl. Math.— 1962.— P. 29—49.
18. Вайнахт Р. (Weinacht R. J.) Fundamental solutions for a class of singular equations. // Contribution to diff. equat.— 1964.— V. 3.— P. 43—45
19. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1979.— 318 с.

20. Ганелиус Т. (Ganelius T.) On the remaider in a Tauberian theorem // Kungl. Fis. Sallskapetsi Lund Förh.— 1954.— V. 24; V. 20.— P. 73.
21. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1958.— 439 с.
22. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.
23. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.— М.: Физматгиз, 1962.— 656 с.
24. Гординг Л. (Gärding L.) On the asimptotic properties of spectral functions belouing to a self adjoint semibounder extension of an elliptic differential operator // Kungl. Fis. Sallskapetsi. Lund Forh.— 1954.— V. 24. (Русский перевод: Об асимптотических свойствах спектральной функции самосопряженного полуограниченного расширения эллиптического дифференциального оператора // Математика: Сб. переводов иностр. статей.
25. Гординг Л. (Gärding L.) Eigenfunction expansion connected with elliptic differential operators // C. r II Congres Math. Scandinaves.— Lund, 1953.— P. 44—45. (Русский перевод: Разложения по собственным функциям, связанные с эллиптическими дифференциальными операторами // Математика: Сб. переводов иностр. статей — 1957.— Т. I, № 3.— С. 107—116.)
26. Гординг Л. (Gärding L.) On the asimptotic distribution of the eigenvalue and eigenfunctions of elliptic diffential operators // Math. Scand.— 1953.— V. 1.— P. 237—255.
27. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.— 702 с.
28. Гриффитс Дж. Л. (Griffith J. L.) Hankel transforms of functions zero outside an finite interval // J. Proc. Roy. Soc. New South Wales.— 1955.— V. 89.— P. 109—115.
29. Гью Л. (Guy L.) Hankel multiplier transformations and weighted $p$-norma // Trans. Amer. Math. Soc.— 1960.— V. 95.— P. 137—189.
30. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория.— М.: Иностр. лит., 1962.— 895 с.
31. Дельсарт Ж. (Delsarte J.) Sur une extension de la formule of Taylor. // J. Math. Pure Appl.— 1938.— V. 17, № 9.— P. 219—231.
32. Дельсарт Ж. (Delsarte J.) Une extension nouvelle de la theorie des functions presqueperiodiques de Bohr // Acta Math.— 1938.— V. 69.— P. 259—317.
33. Диаз Д., Вайнштейн А. (Diaz J. B., Weinstein A.) On the fundamental solutions of singular Beltrami operators // Stud. in Math. and Mech. presented to R. V. Mises.— New York, 1954.— P. 97—102.
34. Диесперов В. Н., Ломакин Л. А. Об одной краевой задаче // Журн. выч. математики и мат. физики.— 1974.— Т. 14, № 5.— С. 1244—1260.
35. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М.: Физматгиз, 1961.— 523 с.
36. Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб.— 1955.— Т. 36, № 2.— С. 299—310.
37. Засорин Ю. В. Точные решения сингулярных уравнений вязких трансзвуковых течений // Докл. АН СССР.— 1984.— Т. 278, № 6.— С. 1347—1351.
38. Засорин Ю. В. О свойствах симметрии преобразования Фурье — Бесселя // Неклассические уравнения математической физики.— Новосибирск, 1986.— С. 52—58.
39. Засорин Ю. В. О функции Грина одной краевой задачи // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. (Тез. докл.) — Махачкала, 1986.— С. 88—89.
40. Засорин Ю. В. О поведении на бесконечности решений некоторых классов дифференциальных уравнений и теоремы единственности // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.— Новосибирск, 1984.— С. 74—80.
41. Земанян А. Г. Интегральные преобразования обобщенных функций.— М.: Наука, 1974.— 399 с.

42. Земанян А. Г. (Zemanian A. H.) The Hankel transformation of certain distributions of rapid growth // SIAM J. Math. Appl.— 1966.— V. 14.— P. 678—690.
43. Ильин В. А. Ядра дробного порядка // Мат. сб.— 1957.— Т. 41, № 4.— С. 457—480.
44. Ильин В. А. О разложимости функций, обладающих особенностями, в условно сходящийся ряд по собственным функциям // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1958.— Т. 22, № 1.— С. 49—80.
45. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа // Успехи мат. наук.— 1958.— Т. 13, № 1.— С. 87—180.
46. Ильин В. А. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам оператора Лапласа // Успехи мат. наук.— 1968.— Т. 23, № 2.— С. 61—120.
47. Иосида К. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967.— 624 с.
48. Ион Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям в частных производных.— М.: Иностр. лит., 1958.— 158 с.
49. Карамата Д. (Karamata J.) Newer Bewos and Verollgemeinerung der Tauberschen Sätze welche di haplacesche and Steiltjessche Transformation betreffen // J. reine angew. Math.— 1931.— V. 164.— P. 27—39.
50. Катрахов В. В. К теории уравнений с частными производными с сингулярными коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1974.— Т. 218, № 1.— С. 17—20.
51. Катрахов В. В. Спектральная функция некоторых сингулярных дифференциальных операторов I // Диф. уравнения.— 1976.— Т. 12, № 7.— С. 1256—1266.
52. Катрахов В. В. Спектральная функция некоторых сингулярных дифференциальных операторов II // Диф. уравнения.— 1976.— Т. 12, № 9.— С. 1605—1618.
53. Катрахов В. В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 1.— С. 86—97.
54. Катрахов В. В., Киприянов И. А. Степени сингулярного эллиптического оператора // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики: Тр. сем. С. Л. Соболева.— Новосибирск, 1980. № 1.— С. 60—80.
55. Катрахов В. В. Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся уравнений // Докл. АН СССР.— 1980.— Т. 251, № 6.— С. 1296—1300.
56. Катрахов В. В. Сингулярные краевые задачи и операторы преобразования // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.— Новосибирск, 1981.— С. 87—91.
57. Катрахов В. В. Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений // Мат. сб.— 1980.— Т. 112, № 3.— С. 354—379.
58. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР.— 1951.— Т. 77, № 1.— С. 181—183.
59. Киприянов И. А. Об одном классе теории вложения с весом // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 147, № 3.— С. 540—543.
60. Киприянов И. А. О вариационном методе решения одного класса вырождающихся эллиптических уравнений // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 152, № 1.— С. 35—38.
61. Киприянов И. А. О краевых задачах для уравнений в частных производных с оператором Бесселя // Докл. АН СССР.— 1964.— Т. 158, № 2.— С. 275—278.
62. Киприянов И. А. Об одном операторе, порожденном преобразованием Фурье—Бесселя // Сиб. мат. журн. 1966.— Т. 8, № 3.— С. 601—620.
63. Киприянов И. А. Преобразование Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1967.— Т. 89.— С. 130—213.

64. Киприянов И. А., Кононенко В. И. Фундаментальные решения $B$-эллиптических уравнений // Диф. уравнения.— 1967.— Т. 3, № 1.— С. 114—129.
65. Киприянов И. А. Оценки в $L_{2,\gamma}$ решений краевых задач для уравнений в частных производных с оператором Бесселя // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1967.— Т. 91.— С. 27—46.
66. Киприянов И. А. Об одной вариационной задаче в полупространстве // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1967.— Т. 91.— С. 19—26.
67. Киприянов И. А. О самосопряженных расширениях некоторых сингулярных операторов в частных производных // Докл. АН СССР.— 1967.— Т. 176, № 6.— С. 1236—1239.
68. Киприянов И. А. О неравенстве Гординга для вырождающихся эллиптических операторов // Докл. АН СССР.— 1968.— Т. 181, № 4.— С. 792—794.
69. Киприянов И. А., Кононенко В. И. О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных // Диф. уравнения.— 1969.— Т. 5, № 8.— С. 1470—1483.
70. Киприянов И. А., Ключанцев М. И. Оценки поверхностного потенциала, порожденного оператором обобщенного сдвига // Докл. АН СССР.— 1969.— Т. 188, № 5.— С. 997—1000.
71. Киприянов И. А., Ключанцев М. И. Об ограниченности одного класса сингулярных интегральных операторов // Докл. АН СССР.— 1969.— Т. 186, № 6.— С. 1253—1255.
72. Киприянов И. А. О неравенстве Гординга для вырождающихся эллиптических операторов и его приложениях // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1969.— Т. 105.— С. 77—88.
73. Киприянов И. А. Шкалы функциональных пространств с весом и их применения // Теоремы вложения и их приложения. (Тр. симпоз. по теоремам вложения, Баку, 1966.) — М., 1970.— С. 107—118.
74. Киприянов И. А. Краевые задачи для сингулярных эллиптических операторов // Докл. АН СССР.— 1970.— Т. 195, № 1.— С. 32—35.
75. Киприянов И. А. О функции Грина некоторых сингулярных эллиптических операторов // Докл. АН СССР.— 1970.— Т. 194, № 6.— С. 1255—1258.
76. Киприянов И. А., Ключанцев М. И. О ядрах Пуассона для краевых задач с оператором Бесселя // Дифференциальные уравнения с частными производными.— М., 1970.— С. 119—134.
77. Киприянов И. А., Ключанцев М. И. О сингулярных интегралах порожденных оператором обобщенного сдвига // Сиб. мат. журн.— 1970.— Т. 11, № 5.— С. 1060—1083.
78. Киприянов И. А., Ключанцев М. И. Нормы дробного порядка и оценки одного класса сингулярных интегралов // Труды семинара по функциональному анализу. (Тр. мат. фак-та ВГУ.) — Воронеж, 1970.— С. 45—62.
79. Киприянов И. А. Об одном классе сингулярных эллиптических операторов I // Диф. уравнения.— 1971.— Т. 7, № 11.— С. 2066—2077.
80. Киприянов И. А. Асимптотическое распределение собственных значений и собственных функций одного класса сингулярных эллиптических операторов // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1972.— Т. 117.— С. 159—179.
81. Киприянов И. А., Ключанцев М. И. Сингулярная задача в частных производных с граничными условиями на поверхности особенностей // Докл. АН СССР.— 1972.— Т. 202, № 5.— С. 1001—1003.
82. Киприянов И. А. О некоторых задачах для сингулярных уравнений в частных производных // Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики. (Материалы III Советско-Чехословацк. совещ., май, 1971.) — Новосибирск, 1972.— С. 94—102.
83. Киприянов И. А. Об одном классе сингулярных эллиптических операторов II // Сиб. мат. журн.— 1973.— Т. 14, № 3.— С. 560—568.
84. Киприянов И. А. Вырождающиеся дифференциальные операторы главного типа // Докл. АН СССР.— 1973.— Т. 213, № 6.— С. 1247—1250.

85. Киприянов И. А., Кащенко Н. Д. Об одном операторе осреднения, связанном с обобщенным сдвигом // Докл. АН СССР.— 1974.— Т. 218, № 1.— С. 21—23.
86. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. Об одном классе псевдодифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1974.— Т. 218, № 2.— С. 276—280.
87. Киприянов И. А., Богачев Б. М. О следах функций из весового пространства // Докл. АН СССР.— 1975.— Т. 225, № 4.— С. 756—757.
88. Киприянов И. А. Теоремы вложения и локальная разрешимость некоторых сингулярных уравнений в частных производных // Теоремы вложения и их приложения (Материалы Всесоюзного симпозиума, Алма-Ата, 1973).— Алма-Ата, 1976.— С. 50—53.
89. Киприянов И. А., Ключанцев М. И. О функции Грина для задач с дифференциальным оператором Бесселя // Докл. АН СССР.— 1968.— Т. 183, № 5.— С. 1005—1008.
90. Киприянов И. А., Ключанцев М. И. О ядрах Пуассона для краевых задач с дифференциальным оператором Бесселя // Дифференциальные уравнения с частными производными. (Тр. семинара, посвящ. 60-летию акад. С. Л. Соболева).— М., 1970.— С. 119—134.
91. Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М. О краевых задачах в областях общего вида для сингулярных параболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1976.— Т. 23, № 6.— С. 1271—1274.
92. Киприянов И. А., Катрахов В. В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сб.— 1977.— Т. 104, № 1.— С. 49—68.
93. Киприянов И. А., Богачев Б. М. О нормальной разрешимости некоторых сингулярных и вырождающихся дифференциальных уравнений // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. (Пятое Советско-Чехословацк. совещ.).— Новосибирск, 1978.— С. 104—110.
94. Киприянов И. А., Богачев Б. М. О свойствах функций из весового пространства на дифференцируемых многообразиях // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1980.— Т. 156.— С. 110—120.
95. Киприянов И. А., Иванов Л. А. Фундаментальные решения однородных *B*-гиперболических уравнений // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 4.— С. 95—102.
96. Киприянов И. А., Иванов Л. А. Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями по нескольким переменным // Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики. (Труды сем. С. Л. Соболева.)— Новосибирск, 1983.— № 1.— С. 55—77.
97. Киприянов И. А., Иванов Л. А. Уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу в римановом пространстве // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 260, № 4.— С. 790—794.
98. Киприянов И. А., Богачев Б. М. Некоторые весовые нормы в образах Фурье — Бесселя // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений мат. физики.— Новосибирск, 1984.— С. 43—49.
99. Киприянов И. А., Богачев Б. М. Дифференциальные уравнения с оператором Бесселя в четверти пространства // Неклассические уравнения математической физики.— Новосибирск, 1985.— С. 72—88.
100. Киприянов И. А., Куликов А. А. Теорема Пэли — Винера — Шварца для преобразования Фурье — Бесселя // Докл. АН СССР.— 1988.— Т. 298, № 1.— С. 21—25.
101. Киприянов И. А., Куликов А. А. Теорема Пэли — Винера — Шварца для преобразования Фурье — Бесселя // XI Всесоюзная школа по теории операторов в функц. пространствах. (Тез. докл.) — Челябинск, 1986.— Ч. 2.— с. 64.
102. Киприянова Н. И. О разложениях по собственным функциям некоторых сингулярных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1976.— Т. 231, № 2.— С. 281—284.
103. Киприянова Н. И. Асимптотика спектральной функции сингулярных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1978.— Т. 239, № 3.— С. 523—525.

104. Киприянова Н. И. Асимптотические формулы для собственных функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений матем. физики.— Новосибирск, 1980.— С. 93—97.
105. Киприянова Н. И. Разложение сглаживающей функции // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений матем. физики.— Новосибирск, 1981.— С. 100—103.
106. Киприянова Н. И. К вопросу разложимости функций, обладающих особенностями // Неклассические задачи уравнений матем. физики.— Новосибирск, 1982.— С. 90—92.
107. Киприянова Н. И. Теорема о среднем для *B*-полигармонического уравнения // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений матем. физики.— Новосибирск, 1984.— С. 81—85.
108. Киприянова Н. И. Формула среднего значения для собственных функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Диф. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 11.— С. 1988—2001.
109. Киприянова Н. И. О собственных функциях *B*-полигармонического оператора // XI Всесоюзная школа по теории операторов в функц. пространствах.— Челябинск. 1986.— С. 64.
110. Ключанцев М. И. Оценки решений краевых задач с оператором Бесселя // Докл. АН СССР.— 1969.— Т. 188, № 6.— С. 1227—1230.
111. Ключанцев М. И. Формула представления решения неоднородной краевой задачи с оператором Бесселя // Диф. уравнения.— 1969.— Т. 5, № 12.— С. 2237—2244.
112. Ключанцев М. И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига I // Сиб. мат. журн.— 1970.— Т. 11, № 4.— С. 810—821.
113. Ключанцев М. И. Оценки фундаментальных решений сингулярных краевых задач с параметром // Докл. АН СССР.— 1973.— Т. 211, № 6.— С. 1284—1286.
114. Ключанцев М. И. О построении *r*-четных решений сингулярных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.— 1975.— Т. 224, № 5.— С. 1004—1007.
115. Ключанцев М. И. Интегралы дробного порядка и сингулярные краевые задачи // Диф. уравнения.— 1976.— Т. 12, № 6.— С. 983—990.
116. Костюченко А. Г., Митягин Б. С. О равномерной сходимости спектральных разложений // Функц. анализ и его приложения.— 1979.— Т. 7, № 2.— С. 32—42.
117. Кобер Г. (Kober H.) On fractional integrals and derivatives // Quart. J. Math.— 1940.— V. 11.— P. 193—211.
118. Кон Дж. Дж., Ниренберг Л. (Cohn J. J., Nirenberg L.) An algebra of pseudo — differential operators // Comm. Pure Appl. Math.— 1965.— V. 18, 1/2.— P. 269—305.
119. Крехивский В. В., Матийчук М. И. Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя // Докл. АН СССР.— 1968.— Т. 181, № 6.— С. 1320—1323.
120. Крехивский В. В., Матийчук М. И. О краевых задачах для параболических систем о оператором Бесселя // Докл. АН СССР.— 1971.— Т. 199, № 4.— С. 773—775.
121. Куликов А. А. О фундаментальных решениях и гипоэллиптичности некоторых сингулярных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1982.— Т. 266, № 5.— С. 1049—1052.
122. Куликов А. А. О существовании и гладкости обобщенных решений *B*-гипоэллиптических уравнений // Докл. АН СССР.— 1983.— Т. 273, № 2.— С. 284—289.
123. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики.— М., Л.: Гостехиздат, 1951.— Т. 2.— 544 с.
124. Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.— 830 с.
125. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.— 244 с.
126. Кэррол Р., Шоуолтер Р. (Carrol R. W., Showalter R. E.) Singular and degenerate Cauchy Problems.— New York; San Francisco; London: Acad. Press., 1976.— 329 p.

127. Кэррол Р. (Carrol R. W.) A servey of some results in transformations // Spectral theory differential operators.— Amsterdam, 1981.— P. 81—92.
128. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния для автоморфных функций.— М.: Мир, 1979.— 324 с.
129. Ларин А. А. О локализации средних Рисса спектральных разложений // Неклассические уравнения математической физики.— Новосибирск, 1985.— С. 107—112.
130. Ларин А. А. О спектральных разложениях, отвечающих самосопряженным расширением некоторых сингулярных эллиптических операторов // Докл. АН СССР.— 1987.— Т. 293, № 2.— С. 309—312.
131. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук.— 1951.— Т. 6, № 2.— С. 102—143.
132. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма — Лиувилля,— М.: Наука, 1984.— 240 с.
133. Левитан Б. М. Асимптотическое поведение спектральной функции эллиптического оператора // Успехи мат. наук.— 1971.— Т. 26, № 6.— С. 151—212.
134. Лизоркин П. И. Принцип Дирихле для уравнения Бельтрами в полупространстве // Докл. АН СССР.— 1960.— Т. 194, № 4.— С. 761—764.
135. Лизоркин П. И. ζ-функция Грина оператора Бельтрами и некоторые вариационные задачи // Докл. АН СССР.— 1961.— Т. 139, № 5.— С. 1052—1055.
136. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложения классов дифференцируемых функций // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1969.— Т. 105.— С. 89—167.
137. Ли (Lee W. Y.) On Schwart's Hankel transformation of certain of distributions // SIAM J. Math. Unal.— 1975.— V. 6, 2.— P. 427—432.
138. Лионс Ж.-Л. (Lions J.-L.) Equations differential of problems and limites.— Berlin: Springer-Verlag, 1961.— P. 120.
139. Лионс Ж.-Л. (Lions J.-L.) Operateurs de Delsarte of problems mixtes // Bull. Soc. Math. Franse.— 1956.— V. 84.— P. 9—95.
140. Лоундес Ж. (Lowndes J. S.) Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients // Proc. Edinburg Math. Soc.— 1983.— V. 26.— P. 307—311.
141. Ляхов Л. Н. Об априорной оценке для одного класса эллиптических сингулярных псевдодифференциальных уравнений в четверти пространства // Корректные задачи для неклассических уравнений мат. физики.— Новосибирск, 1980.— С. 131—135.
142. Ляхов Л. Н. Преобразование Фурье — Бесселя ядра сингулярного интегрального оператора, порожденного обобщенным сдвигом // Неклассические уравнения математической физики.— Новосибирск, 1986.— С. 75—83.
143. Ляхов Л. Н. Об одном классе сферических функций и сингулярных псевдодифференциальных операторах // Докл. АН СССР.— 1983.— Т. 272, № 4.— С. 781—784.
144. Ляхов Л. Н. Весовые сферические функции и сингулярные псевдодифференциальные операторы // Диф. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 6.— С. 1020—1032.
145. Маричев О. И. Методы вычислений интегралов от специальных функций.— Минск: Наука и техника, 1978.— 310 с.
146. Матийчук М. И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам II // Диф. уравнения.— 1975.— Т. 11, № 7.— С. 1293—1303.
147. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1977.— 331 с.
148. Михлин С. Г. О мультипликаторах интегралов Фурье // Докл. АН СССР.— 1956.— Т. 109.— С. 701—703.
149. Мухлисов Ф. Г. Первая краевая задача для *B*-эллиптической системы дифференциальных уравнений // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.— Новосибирск, 1984.— С. 109—115.

150. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях.— М.: Мир, 1971.— 232 с.
151. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.— 455 с.
152. Олевский М. Н. Решение задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + \frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = \rho$ для сферической области // Докл. АН СССР.— 1949.— Т. 64, № 6.— С. 767—770.
153. Положий Г. Н. Теория и применение $p$-аналитических и $(p, q)$-аналитических функций.— Киев: Наукова думка, 1973.— 423 с.
154. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции.— М: Наука, 1983.— 750 с.
155. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений.— М.: Мир, 1979.— 493 с.
156. Пуассон С. (Poisson S. D.) Memoire surlesintegrales definies // J. l'Ecpolytech. Tc. 19.— 1823. P. 249—403.
157. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. математика и механика.— 1965.— Т. 29, № 6.— С. 1004—1014.
158. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.— Минск: Наука и техника, 1987.— 687 с.
159. Сили П. (Seely R. T.) Complex poners of an elliptic operators // A.M.S.: Proc. Symp. Purc. Math.— Chicago, 1966.— P. 288—307.
160. Ситник С. М. О скорости убывания решений стационарного уравнения Шредингера // Неклассические уравнения математической физики.— Новосибирск, 1985.— С. 139—147.
161. Ситник С. М. Краевые задачи и операторы преобразования // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. (Тез. докл.).— Махачкала, 1986.— С. 191.
162. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.— М.: Наука, 1966.— 292 с.
163. Сонин Н. (Sonin N.) Recherches sur les fonctions cilindriquess et la development des fonctions continues enseries // Math. Ann.— 1980.— V. 16.— P. 1—80.
164. Соболев Л. С. Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.— 808 с.
165. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.— 664 с.
166. Стейн И., Вейс Г. Гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.— 333 с.
167. Фаге М. К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1958.— Т. 7.— С. 227—268.
168. Фаге М. К. Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1959.— Т. 8.— С. 3—48.
169. Хёрмандер Л. (Hörmander L.) The Spectral function of an elliptic operator // Acta Math.— 1968.— V. 121, N 3—4.— P. 193—218.
170. Хёрмандер Л. (Hörmander L.) Louver bounds at infinity for solutions of differential equations with constant coefficients // Israel Math. J.— 1973.— V. 16.— P. 103—116.
171. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М.: Мир, 1965.— 379 с.
172. Хелгасон С. Преобразование Радона.— М.: Мир, 1983.— 150 с.
173. Шацкий В. П. Об одной краевой задаче для сингулярных симметрических систем нечетного порядка // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 284, № 4.— С. 806—809.
174. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния.— М.: Мир, 1980.— 408 с.

175. Шацкий В.П. Об одной краевой задаче для сингулярных систем нечетного порядка в четверти пространства//Краевые задачи для нелинейных уравнений.—Новосибирск, 1982.—С. 151—153.
176. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс.— М.: Наука, 1965.—328 с.
177. Эрдейи А. (Erdelyi A.) On fractional integration and its application to the Hankel transforms//Quart. J. Math. Oxford.—1940.—V. 11.— P. 293—303.
178. Ярославцева В.Я. Об одном классе операторов преобразования и их приложении к дифференциальным уравнениям//Докл. АН СССР.— 1976.—Т. 227, № 4.—С. 816—819.
179. Ярославцева В.Я. Ограниченность одного класса операторов преобразования в весовых пространствах//Неклассические уравнения математической физики.—Новосибирск, 1986.—С. 217—220.

## СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

180. Киприянов И.А., Катрахов В.В. Сингулярные краевые задачи для некоторых эллиптических уравнений высших порядков.— Препринт/АН СССР ДО. Ин-т прикл. мат.—Владивосток, 1989.—24 с.
181. Мешков В.З. Весовые дифференциальные неравенства и их приложения для оценок скорости убывания на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка //Тр. МИРАН.—1989.—Т. 290.— С. 139—158.
182. Киприянов И.А., Иванов Л.А. Представление Даламбера и равнораспределение энергии //Дифференц. уравнения.—1990.— Т. 26, № 3.—С. 458—464.
183. Половинкин И.П. Формула среднего значения для волнового уравнения на сфере //Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Тезисы докладов.—Владивосток, 1990.—С. 127.
184. Ляхов Л.Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов //Докл. АН СССР.—1990.—Т. 315, № 2.—С. 291—296.
185. Киприянов И.А., Куликов А.А. Фундаментальные решения $B$-эллиптических уравнений //Дифференц. уравнения.—1991.—Т. 27, № 8.—С. 1387—1394.
186. Ляхов Л.Н. Обращение $B$-потенциалов //Докл. АН СССР.—1991.— Т. 321, № 3.—С. 466—469.
187. Киприянова Н.И. О равномерной сходимости разложений по собственным функциям $B$-гармонического оператора в замкнутой области //Докл. АН СССР.—1991.—Т. 318, № 5.—С. 1063—1067.
188. Киприянов И.А., Засорин Ю.В. О фундаментальных решениях волнового уравнения с многими особенностями и принцип Гюйгенса //Дифференц. уравнения.—1992.—Т. 28, № 3.—С. 452—462.
189. Киприянов И.А., Засорин Ю.В. Принцип Ньютона для волнового уравнения //Матем. заметки.—1992.—Т. 51, вып. 4.—С. 36—41.
190. Ларин А.А. Об ограниченности степеней самосопряженных расширений сингулярных эллиптических операторов, действующих в весовых классах //Дифференц. уравнения.—1992.—Т. 28, № 3.—С. 1978—1990.

191. Ляхов Л.Н. Описание пространств $B$-потенциалов Бесселя $B$-гиперсингулярными интегралами. Всесоюзная конференция «Условно-корректные задачи математической физики и анализа». Тезисы докладов.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992.—С. 202.

192. Ляхов Л.Н. Пространство $B$-потенциалов Рисса //ДАН.—1994.—Т. 334, № 3.—С. 278—280.

193. Ляхов Л.Н. Описание пространства $B$-потенциалов Рисса $\mathbf{U}_\alpha^\gamma(\mathbf{L}_p^\gamma)$ с помощью $B$-производных порядка $2\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ //ДАН.—1995.—Т. 341, № 2.—С. 161—165.

194. Киприянов И.А., Куликов А.А. Оптимальное управление процессами, описываемыми сингулярными уравнениями параболического типа //Исследование качественных свойств решений краевых задач.—Воронеж: ВГУ, 1996.—С. 70—76.

195. Половинкин И.П. Обращение теоремы о среднем значении для волнового уравнения //Дифференц. уравнения.—1996.—Т. 27.—С. 1987—1990.

196. Ляхов Л.Н. О символе интегральных операторов типа $B$-потенциала с однородной характеристикой //ДАН.—1996.—Т. 351, № 2.—С. 164—168.

197. Ляхов Л.Н. $B$-гиперсингулярные интегралы со стабилизирующимися характеристиками //ДАН.—1996.—Т. 350, № 6.—С. 735—738.

198. Киприянов И.А. Существование фундаментальных решений $B$-сингулярных уравнений //Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения 8». Современные методы в теории краевых задач. Тезисы докладов.—Воронеж, 1997.—С. 69.

199. Ляхов Л.Н. Мультипликаторы смешанного преобразования Фурье—Бесселя //Тр. МИРАН.—1997.—Т. 215.—С. 234—249.

200. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона //ДАН (в печати).

201. Киприянов И.А. Весовые потенциалы Рисса. Сингулярная задача Коши //ДАН (в печати).

## КОММЕНТАРИЙ К СПИСКУ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Особенно примечателен цикл работ Л.Н. Ляхова, в которых исследуются весовые сферические функциии (введены им же в 1983 г.), ограниченность обобщенной свертки в весовых классах с сингулярными и $B$-потенциальными ядрами. Введены конечные разности, порожденные обобщенным сдвигом, которые использованы для построения интегральных конструкций, обращающих $B$-потенциалы. По сути речь идет о дальнейшем развитии теории сингулярных псевдодифференциальных операторов, построенных на основе смешанного преобразования Фурье—Бесселя, и о важном приложении этой теории к описанию функциональных классов дробной гладкости, где роль дробной производной играют дробные степени дифференциального оператора Бесселя. Начато исследование нового класса интегральных уравнений, ядра которых порождены обобщенным сдвигом.

В работах И.А. Киприянова с помощью преобразования Фурье—Бесселя—Лапласа доказано существование фундаментального решения для $B$-сингулярных уравнений. В работе «Весовые потенциалы Рисса. Сингулярная задача Коши», представленной в журнал ДАН в 1997 г., дается конструкция многомерного весового интеграла Римана—Лиувилля и приложение к задаче Коши.

В совместных работах автора и Ю.В. Засорина [188, 189] применен весовой гармонический анализ для построения фундаментального решения $B$-гиперболического уравнения со многими особенностями, выделен вопрос о наличии принципа Гюйгенса для подобных задач.

Отметим также работу И.А. Киприянова, Л.Н. Ляхова «О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона» [200], в которой установлена конструктивная связь преобразований Фурье и Фурье—Бесселя через посредство специального преобразования Радона. На основе этой связи получены весьма оригинальные формулы, которые, по-видимому, должны послужить основой для создания интегральной геометрии «сферически уплотненных пространств».

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ........ 5

## ГЛАВА I
## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ—БЕССЕЛЯ

§ 1.1. Пространства пробных функций и распределений ........ 11
§ 1.2. Распределение $r^\lambda$ ........ 15
§ 1.3. Преобразование Ганкеля (одномерное преобразование Бесселя в $S_+$) ........ 18
§ 1.4. Дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы, соответствующие преобразованию Ганкеля (Бесселя) ........ 21
§ 1.5. Преобразование Фурье—Бесселя пробных функций. Теорема Пэли—Винера ........ 27
§ 1.6. Преобразование Фурье—Бесселя распределений ........ 31
§ 1.7. Преобразование Фурье—Бесселя распределения $r^\lambda$ ........ 32
§ 1.8. Обобщенная свертка и ее свойства ........ 34
§ 1.9. Теорема Пэли—Винера—Шварца для преобразования Фурье—Бесселя ........ 39
§ 1.10. Свойства симметрии преобразования Фурье—Бесселя ........ 40
Примечания ........ 50

## ГЛАВА II
## ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 2.1. Классические операторы преобразования ........ 53
§ 2.2. Конструкция операторов преобразования ........ 56
§ 2.3. Действие оператора преобразования $I_\varepsilon^\mu$ в пространствах Соболева на полупрямой ........ 66
§ 2.4. Связь операторов преобразования с преобразованиями Фурье и Ганкеля (Бесселя) ........ 69
§ 2.5. Операторы преобразования и функциональные пространства (одномерный случай) ........ 74
§ 2.6. Некоторые свойства пространств Соболева ........ 82
§ 2.7. Многомерные операторы преобразования ........ 86
Примечания ........ 91

## ГЛАВА III
## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 3.1. Пространства $H^s_{\nu,+}(\Omega^+)$. Теоремы вложения ........ 94
§ 3.2. Определение пространства $H^s_\nu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Внутренние теоремы вложения ........ 96
§ 3.3. Мультипликаторы ........ 100
§ 3.4. Весовые следы ........ 105
§ 3.5. Специальное разбиение единицы. Определение пространства $H^s_\nu(\Omega)$ ........ 109

§ 3.6. Теоремы вложения для весовых следов ........ 112
Примечания ........ 113

## ГЛАВА IV
## СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 4.1. Итерированное уравнение $\Delta_B^m u=\delta_B$ ........ 116
§ 4.2. Разложение $r^\lambda$ на плоские весовые волны ........ 118
§ 4.3. $B$-эллиптическое уравнение $\mathscr{L}(D_x, By)u=a_0\delta_B(x, y)$ ........ 120
§ 4.4. Разложение гладкой финитной функции на плоские весовые волны ........ 123
§ 4.5. $B$-эллиптическое уравнение $\mathscr{L}(D_{x'}, B_{x_{n+1}})u=f$ ........ 126
§ 4.6. Эллиптическая краевая задача в полупространстве с нелокальными краевыми условиями. Постановка задачи. Регуляризатор и априорные оценки ........ 131
§ 4.7. Весовая краевая задача в полупространстве. Постоянные коэффициенты ........ 136
§ 4.8. Весовая краевая задача в полупространстве. Переменные коэффициенты ........ 138
§ 4.9. Весовая краевая задача в ограниченной области ........ 143
Примечания ........ 149

## ГЛАВА V
## СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 5.1. Параметрикс произвольного порядка ........ 154
§ 5.2. Ядра дробных степеней ........ 160
§ 5.3. Формула среднего значения и ядра дробных степеней $\Delta_B$ ........ 167
§ 5.4. Асимптотические свойства спектральной функции сингулярного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами ........ 173
§ 5.5. Асимптотические свойства спектральной функции сингулярного дифференциального оператора с переменными коэффициентами ........ 178
Примечания ........ 184

Список литературы ........ 187

Научное издание

*КИПРИЯНОВ Иван Александрович*

**СИНГУЛЯРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ**

Редактор *В.В. Абгарян*
Художественный редактор *Г.М. Коровина*
Технический редактор *Е.В. Морозова*
Корректоры *Т.С. Вайсберг, Л.С. Сомова*

ИБ № 41873

ЛР № 020297 от 27.11.91. Подписано к печати 08.09.97. Формат 60×90/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Гарнитура таймс. Усл. печ. л. 13. Уч.-изд. л. 14,3. Тираж 500 экз. Заказ тип. 2325 . С-027.

Издательская фирма
«Физико-математическая литература» РАН
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с готовых диапозитивов в Московской типографии № 2 РАН
121099, Москва, Шубинский пер., 6

# СПИСОК ОПЕЧАТОК

| Страница, строка | Напечатано | Должно быть |
|---|---|---|
| 22, ф-ла (1.4.7) | $\dots \int\limits_0^\infty \Big[ t^{2\nu+2} \dots$ | $\dots \int\limits_0^\infty \Big[ \frac{1}{t^{2\nu+2}} \dots$ |
| 27, 6-я сн. | (см. [63]) | (см. [64]) |
| 57, 1-я сн. | $t^{-2N-1} \left(\tau^2 - t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \, dt d\tau$ | $t^{-2\nu-1} \left(\tau^2 - t^2\right) \, dt d\tau$ |
| 95, ф-ла (3.1.3) | $\dots (-ix)^\alpha t^{2\alpha_n+1} \, t^{2\nu+1} \, dt d\sigma$ | $\dots (-ix)^2 t^{2(\alpha_n+1)} \, t^{2\nu+1} \, dt d\sigma$ |
| 107, 3-я сн. | $S_{\nu,e} B^k = D_y^{2k} S_{\nu,e}$ | $S_{\nu,e} B_y^k = D_y^{2k} S_{\nu,e}$ |
| 169, ф-ла (5.3.6) | $\dots j_{\frac{N+k-2}{2}}(R\sqrt{\lambda})$ | $\dots J_{\frac{N+k-2}{2}}(R\sqrt{\lambda})$ |
| 169, ф-ла (5.3.7) | $\dots j_{\frac{N+k-2}{2}}(R\sqrt{\lambda})$ | $\dots J_{\frac{N+k-2}{2}}(R\sqrt{\lambda})$ |
| 170, ф-ла (5.3.10) | $\dots j_{\frac{N+k}{2}+l}$ (2 раза) | $\dots J_{\frac{N+k}{2}+l}$ (2 раза) |
| 175, 10-я св. | Л. Хёрмандером [169] | Л. Хёрмандером [170] |
| 175, ф-ла (5.4.5) | $\dots \mathcal{J}(\xi) \xi_{n+1}^{2\nu} \, d\xi$ | $\dots \mathcal{G}(\xi) \xi_{n+1}^{2\nu} \, d\xi$ |
| 175, 11-я сн. | $\mathcal{J} = F_B g$ | $\mathcal{G} = F_B g$ |
| 51, 1-я сн. | [142] | [143, 144] |

I.A. KIPRIJANOV

# SINGULAR ELLIPTIC BOUNDARY PROBLEMS

*Physical and Mathematical Publishing Company*
*Russian Academy of Sciences*

**Moscow, 1997, 208 pages**

The account of multy-dimension integral Fourier—Bessel—Hankel transformation theory is given in the monography. The final chapters contain new results on general weight boundary value problems for singular $B$-elliptic and $B$-parabolic equations where parameter may be complex. There it is shown how spectral characteristics of $B$-elliptic operators including kernels of fractional powers are produced. The theory of boundary value problems for the equations with peculiarity has been reflected there.

The monography has been written for specialists on the equations of mathematical physics and functional analysis as well as students and post gratuate students of mathematical and applied specialities.

## CONTENTS

INTRODUCTION

Chapter 1
**The integral Fourier—Bessel transform**

Brief contents of the chapter
1.1. Space of trial functions and distributions
1.2. Distibution $r^{\lambda}$
1.3. The Hankel transform (one-dimensional Bessel transform) in $S_{+}$
1.4. Differential and integro-differential operators corresponding to the Hankel transform (Bessel transform)
1.5. The Fourier—Bessel transform of trial functions. The Paley—Wiener theorem
1.6. The Fourier—Bessel transform of distributions
1.7. The Fourier—Bessel transform of distribution $r^{\lambda}$
1.8. Generalized convolution and its properties
1.9. The Paley—Wiener—Schwartz theorem for the Fourier—Bessel transform
1.10. Properties of symmetry of the Fourier—Bessel transform
Comments

## Chapter 2
## Transmutation operators

Brief contents of the chapter
2.1. Classical transmutation operators
2.2. Construction of transmutation operators
2.3. Action of transmutation operators $I_e^\mu$ in the Sobolev space on the halfline
2.4. Connection of transmutation operators with the Fourier transform and Hankel transform (Bessel transform)
2.5. Transmutation operators and functional spaces (one-dimensional case)
2.6. Certain properties of the Sobolev space
2.7. Transmutation operators ($n$-dimensional case)
Comments

## Chapter 3
## Functional spaces

Brief contents of the chapter
3.1. Spaces $H^s_{v,+}(\Omega^+)$. Embedding theorems
3.2. Definition of the $H^s_v(E^{n+1}_+)$. Interior embedding theorems
3.3. Multipliers
3.4. Weight traces
3.5. Spesial partition of unity. Definition of the $H^s_v(\Omega)$ space
3.6. Embedding theorems for weight traces
Comments

## Chapter 4
## Singular partial differential equations

Brief contents of the chapter
4.1. Iterated equation $\Delta^m_B u = \delta$
4.2. Expansion of $r^\lambda$ in the plane weight waves
4.3. $B$-elliptic equation $\mathcal{L}u = f$
4.4. Expansion of smooth finite function in plane weight waves
4.5. $B$-elliptic equation
4.6. Elliptic boundery value problem with nonlocal boundary conditions in half space. Regularization and a apriori estimates
4.7. Weight boundary value problem in halfspace. Constant coefficients
4.8. Weight boundary value problem in halfspace. Variable coefficients
4.9. Weight boundary value problem in bounded domain
Comments

## Chapter 5
## Spectral characteristics

Brief contents of the chapter
5.1. Parametrix of arbitrary order
5.2. Kernels of fractional power
5.3. Mean value formula and kernels of fractional power of $\Delta_B$
5.4. Asymtotic properties of spectral function of singular differential operator with constant coefficients
5.5. Asymtotic properties of spectral function of singular differential operator with variable coefficients
Comments

BIBLIOGRAPHY

# PROFESSOR I.A. KIPRIJANOV

*Department of Mathematics*
*Voronezh State University*

Voronezh, 394000, Russia

Professor Ivan Aleksandrovich Kiprijanov, Doctor of Physics and Mathematics. He is a great expert in the field of mathematical analysis and the theory of differential equations of mathematical physics. To him are due fundamental results in the theory of weighted function spaces, in the theory of singular elliptic boundary value problems, and in the qualitative theory of singular wave equations.

In 1949 he was accepted as a researcher in the Steklov Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of USSR. His supervisor was M.V. Keldysh. In 1954 Kiprijanov obtained his Ph. D. with a successfully defended thesis on the theory Fourier series and in 1964 at the Steklov Institute the D. Sc. with a thesis on weighted function spaces, which he had introduced, and their application to boundary value problems for singular elliptic equations.

In 1972 he organized a department for differential equations in the Faculty of Apllied Mathematics and Mechanics at the University of Voronezh, and he has continued to the present day to run the department.